Einführung in die Informationsfusion
Übungsblatt 2

J. Sander, Dr. M. Heizmann
Institut für Anthropomatik
Lehrstuhl für Interaktive Echtzeitsysteme
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Wintersemester 2013/2014

1 Bayes'sche Fusion

1.1 Entropie

Die Entropie $H(\Pr(x))$ einer diskreten Zufallsgröße x mit Wertebereich X und Verteilung $\Pr(x)$ ist definiert als

$$H(\Pr(x)) = -\sum_X \Pr(x)\log(\Pr(x)). \tag{1}$$

Ist die Zufallsgröße ξ kontinuierlich mit Wertebereich Ξ und stetiger Verteilung $p(\xi)$, so ist ihre Entropie $h(p(\xi))$ definiert als

$$h(p(\xi)) = -\int_\Xi p(\xi)\log p(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass h nicht aus H bei einer immer feiner werdenden Diskretisierung resultiert.

<u>Hinweis:</u> Diskretisieren Sie dazu den Wertebereich Ξ der kontinuierlichen Zufallsgröße ξ, indem Sie ihn in äquidistante halboffene Intervalle $[k\Delta, (k+1)\Delta)$ der Länge Δ zerlegen. Nutzen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung, um den Wert des Integrals

$$\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} p(\xi)\mathrm{d}\xi$$

zu bestimmen und definieren Sie hierüber eine diskretisierte Version ξ_Δ von ξ. (1) liefert Ihnen dann die Entropie von ξ_Δ in Abhängigkeit von der Feinheit Δ der Diskretisierung. Zeigen sie dann

$$\lim_{\Delta\to 0} H(\Pr(\xi_\Delta)) \neq h(p(\xi)).$$

1.2 Unabhängigkeit; Prinzip der Maximalen Entropie

Peter ist Schüler der Klasse 8a. Ein Drittel der Schüler der Klasse 8a hat braune Augen. Der Anteil der Linkshänder beträgt in der Klasse 8a ebenfalls ein Drittel.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter braune Augen hat und Linkshänder ist, wenn Sie davon ausgehen, dass die Ereignisse "hat braune Augen" und "ist Linkshänder" stochastisch unabhängig sind?

b) Wenden Sie (ohne die Unabhängigkeitsannahme) das Prinzip der Maximalen Entropie an, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass Peter braune Augen hat und Linkshänder ist.

c) Von einer zweidimensionalen diskreten Zufallsgröße $z = (z_1, z_2)$ seien als Vorwissen die Marginalverteilungen $\Pr(z_1)$ und $\Pr(z_2)$ bekannt. Wie lautet die gemeinsame Verteilung $\Pr(z_1, z_2)$, wenn Sie das Prinzip der Maximalen Entropie anwenden?

   Hinweis: Schlussfolgern Sie aus den Ergebnissen der beiden vorangegangenen Aufgabenteile und verwenden sie die Ungleichung

$$-\sum_{z_2} \Pr(z_2) \sum_{z_1} \Pr(z_1|z_2) \log \Pr(z_1|z_2) \leq -\sum_{z_1} \Pr(z_1) \log \Pr(z_1). \qquad (3)$$

d) Wie lässt sich (3) interpretieren?

1.3 Bayes'sche Fusion

Die nominale Zielgröße z hat den den Wertebereich $\{z_A, z_B, z_K\}$ mit

z_A: Objekt vom Typ A vorhanden
z_B: Objekt vom Typ B vorhanden
z_K: kein Objekt vorhanden.

Zur Beobachtung von z wird ein Sensor eingesetzt. Dieser liefert ein Ergebnis aus der Menge $\{d_A, d_B, d_K\}$ mit

d_A: Objekt vom Typ A detektiert
d_B: Objekt vom Typ B detektiert
d_K: kein Objekt detektiert.

Das Beobachtungsmodell $\Pr(d|z)$ ist (vollständig) festgelegt durch die Übergangswahrscheinlichkeiten (Likelihoodmatrix):

	d_A	d_B	d_K
z_A	0,45	0,45	0,1
z_B	0,45	0,45	0,1
z_K	0,1	0,1	0,8

Es gilt also z.B. $\Pr(d_K|z_K) = 0,8$.

a) Geben Sie die A-posteriori-Verteilung $\Pr(z|d_A)$ $(z \in \{z_A, z_B, z_K\})$ an, wenn der Sensor das Ergebnis d_A liefert und kein Vorwissen über z vorliegt.

b) In einer zweiten Messung liefere der Sensor erneut das Ergebnis d_A. Berechnen Sie die A-posteriori-Verteilung $\Pr(z|d_A, d_A)$ $(z \in \{z_A, z_B, z_K\})$, wenn kein Vorwissen über z vorliegt und die Ergebnisse des Sensors als bedingt unabhängig angenommen werden können.

1.4 Bayes'sche Fusion

Fortsetzung von Aufgabe 1.3:

Neben dem in Aufgabe 1.3 gegebenen Sensor wird ein zweiter Sensor eingesetzt, der ebenfalls die Ergebnismenge $\{d_A, d_B, d_K\}$ besitzt. Das zu diesem zweiten Sensor gehörige Beobachtungsmodell (Likelihoodmatrix) ist wie folgt gegeben:

	d_A	d_B	d_K
z_A	0,45	0,1	0,45
z_B	0,1	0,45	0,45
z_K	0,45	0,45	0,1

a) Unterscheiden sich die beiden Sensoren in ihrer Detektions- und Klassifikationsleistung?

b) Die Ergebnisse der beiden Sensoren werden mittels zentralisierter Fusion kombiniert. Welche Zusatzannahme muss dazu erfüllt sein? Geben Sie für diesen Fall die kombinierten Likelihoodmatrizen $\Pr(d^{(1)}, d^{(2)}|z)$ an. Es gelte:

$d^{(1)}$: Ergebnis von Sensor 1
$d^{(2)}$: Ergebnis von Sensor 2

c) Berechnen Sie mittels zentralisierter Fusion die A-posteriori-Verteilung von z für die folgenden Fälle:

- Sensor 1 liefert d_A, Sensor 2 liefert d_A;
- Sensor 1 liefert d_A, Sensor 2 liefert d_B;
- Sensor 1 liefert d_A, Sensor 2 liefert d_K;

d) Beide Sensoren liefern d_A. Wie lässt sich die A-posteriori-Verteilung von z mit verteilter Fusion berechnen? Nehmen Sie an, dass Sensor 2 eine weitere Beobachtung d_A macht. Berechnen Sie auch für diesen Fall die A-posteriori-Verteilung von z.

1.5 Bayes'sche Fusion

Fortsetzung von Aufgabe 1.4:

Im Folgenden seien die beiden Sensoren durch ihre Log-Likelihoodmatrizen gegeben.

Sensor 1 hat Beobachtungsmodell $\log(\Pr(d^{(1)}|z))$ wie folgt:

	d_A	d_B	d_K
z_A	-0,799	-0,799	-2,303
z_B	-0,799	-0,799	-2,303
z_K	-2,303	-2,303	-0,223

Sensor 2 hat Beobachtungsmodell $\log(\Pr(d^{(2)}|z))$ wie folgt:

	d_A	d_B	d_K
z_A	-0,799	-2,303	-0,799
z_B	-2,303	-0,799	-0,799
z_K	-0,799	-0,799	-2,303

Es liege weiterhin kein Vorwissen über z vor. Beide Sensoren machen die Beobachtung d_A.

Berechnen Sie die Log-A-posteriori-Verteilung $\log(\Pr(z|d_A, d_A))$.

1.6 Bayes'sche Fusion

Ein Patient wird vom Arzt auf eine Krankheit getestet.

Es ist bekannt, dass ein Prozent der Bevölkerung an dieser Krankheit leiden. Die Erkennungsrate des Tests liegt bei 90 Prozent (d.h. leidet ein Patient an der Krankheit, so liefert der Test für diesen Patienten mit Wahrscheinlichkeit 0,9 das Ergebnis "erkrankt"). Die Falschalarmrate des Tests beträgt 20 Prozent (d.h. wird ein nicht erkrankter Patient getestet, so liefert der Test mit Wahrscheinlichkeit 0,2 das Ergebnis "erkrankt").

Der Arzt erhält das Testergebnis "erkrankt".

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient tatsächlich die Krankheit hat? Hätten Sie dieses Ergebnis erwartet?