Einführung in die Informationsfusion
Lösungen zum Übungsblatt 3

J. Sander, Dr. M. Heizmann
Institut für Anthropomatik
Lehrstuhl für Interaktive Echtzeitsysteme
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Wintersemester 2013/2014

# 1 Dempster-Shafer-Theorie

## 1.1 Formale Struktur

Per Definition gilt

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B).$$

Der Belief $Bel(A)$ des Ereignisses $A$ ergibt sich also durch Aufsummieren der Basismaße aller Ereignisse, die $A$ implizieren (d.h. die Teilmengen von $A$ sind). Damit ergibt sich sofort

$$Bel(A) = m(\omega_1) + m(\omega_2) + m(\omega_1 \cup \omega_2).$$

Per Definition gilt

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B).$$

Die Plausibilität $Pl(A)$ des Ereignisses $A$ ergibt sich also durch Aufsummieren der Basismaße aller Ereignisse, die $A$ nicht widersprechen (d.h. die einen nichtleeren Schnitt mit $A$ haben). Damit ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} Pl(A) \quad = \quad & m(\omega_1) + m(\omega_2) \\ & + m(\omega_1 \cup \omega_2) + m(\omega_1 \cup \omega_3) + m(\omega_1 \cup \omega_4) + m(\omega_2 \cup \omega_3) + m(\omega_2 \cup \omega_4) \\ & + m(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3) + m(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_4) + m(\omega_1 \cup \omega_3 \cup \omega_4) + m(\omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4) \\ & + m(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4). \end{aligned}$$

Alternativ könnte man die Plausibilität $Pl(A)$ des Ereignisses $A$ mittels der Dualität

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A})$$

aus dem Belief $Bel(\bar{A})$ des zu $A$ komplementären Ereignisses $\bar{A}$ berechnen. Man erhält so

$$Pl(A) = 1 - m(\omega_3) - m(\omega_4) - m(\omega_3 \cup \omega_4).$$

## 1.2 Nicht intuitives Fusionsergebnis

a) Dempsters Rule of Kombination (DRC):

$$\begin{aligned} m_{12}(\emptyset) &:= 0 \\ m_{12}(A) &:= \frac{\sum_{X,Y:X\cap Y=A} m_1(X)\, m_2(Y)}{1-K} \quad \text{falls } A \neq \emptyset \end{aligned}$$

mit Konfliktgrad

$$K := \sum_{X,Y:X\cap Y=\emptyset} m_1(X)\, m_2(Y).$$

Bei der Berechnung der Summen in DRC reicht es, die Schnitte fokaler Ereignisse zu betrachten. Ein Ereignis ist fokal, wenn sein Basismaß größer Null ist.

Fokale Ereignisse bezüglich $m_1$ sind gerade $A$ und $B$.
Fokale Ereignisse bezüglich $m_2$ sind gerade $A$ und $C$.

Berechnung des Konfliktgrades $K$:

$$\begin{aligned} K &= m_1(A)\, m_2(C) + m_1(B)\, m_2(A) + m_1(B)\, m_2(C) \\ &= 0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,01 + 0,99 \cdot 0,99 \\ &= 0,9999 \end{aligned}$$

Es liegt ein partieller Konflikt vor ($0 < K < 1$). Der Konflikt ist sogar näherungsweise absolut ($K \sim 1$). Da jedoch $K < 1$ gilt, ist DRC anwendbar.

Anwendung von DRC:

$$\begin{aligned} m_{12}(A) &= m_1(A)\, m_2(A) \\ &= \frac{0,01 \cdot 0,01}{1 - 0,9999} \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$m_{12}(X) = 0 \quad \text{für alle Ereignisse } X \neq A.$$

b) $A$ wird nach Kombination der beiden Experteneinschätzungen als wahr angenommen:

$$m_{12}(A) = Bel_{12}(A) = Pl_{12}(A) = 1.$$

Dieses Ergebnis ist insofern nicht intuitiv, dass jeder der Experten für sich $A$ nur geringen Glauben schenkte:

$$m_1(A) = Bel_1(A) = Pl_1(A) = 0,01$$

und

$$m_2(A) = Bel_2(A) = Pl_2(A) = 0,01.$$

c) Bezeichnungen im Folgenden:

$z$: Zielgröße, wahres Ereignis (Wertebereich $Z := \{A, B, C\}$)
$d_1$: Einschätzung von Experte 1
$d_2$: Einschätzung von Experte 2

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich die Likelihoodfunktionen

$$\Pr(d_1|z) = (0,01; 0,99; 0); \quad \Pr(d_2|z) = (0,01; 0; 0,99).$$

Da kein Vorwissen vorhanden ist, erhält man durch Anwendung des Prinzips der Maximalen Entropie

$$\Pr(z) = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}).$$

Die Bayes'sche Fusion liefert

$$\begin{aligned}
\Pr(z|d_1, d_2) &= \alpha \Pr(d_1|z) \Pr(d_2|z) \Pr(z) \\
&= \beta \Pr(d_1|z) \Pr(d_2|z) \\
&= \beta\, (0,01; 0,99; 0) \otimes (0,01; 0; 0,99) \\
&= (1; 0; 0).
\end{aligned}$$

Bayes'sche Fusion liefert in diesem Fall also ebenso wie die Fusion mittels der Dempster-Shafer-Theorie die Aussage: $A$ ist wahr. (Grund in beiden Fällen: Multiplikationen mit Null, Normierung)
Man erkennt, dass es bei beiden Verfahren ein großer Unterschied ist, ob man einem Ereignis den Glauben bzw. die Wahrscheinlichkeit Null zuweist oder einen Wert $\epsilon \sim 0$, aber $\neq 0$.

## 1.3 Sensordatenfusion

a) Analog zum Beispiel aus der Vorlesung formuliert man

$$\begin{aligned}
m_1(111) = 0,5; &\quad m_1(\Omega) = 0,5; \\
m_2(111) = 0,4; &\quad m_2(\Omega) = 0,6; \\
m_3(111) = 0,4; &\quad m_3(\Omega) = 0,6.
\end{aligned}$$

Wir berechnen im Folgenden zuerst das kombinierte Basismaß $m_{12} = m_1 \otimes m_2$ und verknüpfen dieses dann mit $m_3$ zum gesuchten Basismaß $m_{123} = m_1 \otimes m_2 \otimes m_3 = m_{12} \otimes m_3$. (Beachten Sie die Kommutativität und Assoziativität von $\otimes$.)

Der Konfliktgrad $K_{12}$ für $m_{12} = m_1 \otimes m_2$ ist gegeben durch

$$K_{12} = \sum_{X,Y: X \cap Y = \emptyset} m_1(X)\, m_2(Y). \tag{1}$$

Bei der Berechnung reicht es, die Schnitte fokaler Ereignisse zu betrachten, da nur diese auf der rechten Seite von (1) Summanden ungleich Null liefern können.
Die fokalen Ereignisse bezüglich beider Basismaße sind gerade $\{111\}$ und

$\Omega$. Man erkennt, dass es also keine fokalen Ereignisse $X$ bezüglich $m_1$ und $Y$ bezüglich $m_2$ gibt, so dass $X \cap Y = \emptyset$.
Somit gilt $K_{12} = 0$, d.h. es liegt kein Konflikt zwischen $m_1$ und $m_2$ vor.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} m_{12}(111) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\{111\}} m_1(X)\, m_2(Y) \\ &= m_1(111)\, m_2(\Omega) + m_1(111)\, m_2(111) + m_1(\Omega)\, m_2(111) \\ &= 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,4 \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{12}(\Omega) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\Omega} m_1(X)\, m_2(Y) \\ &= m_1(\Omega)\, m_2(\Omega) \\ &= 0,5 \cdot 0,6 \\ &= 0,3. \end{aligned}$$

Der Konfliktgrad $K_{123}$ für $m_{123} = m_{12} \otimes m_3$ ist Null. (Begründung analog zu $K_{12}$)

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} m_{123}(111) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\{111\}} m_{12}(X)\, m_3(Y) \\ &= m_{12}(111)\, m_3(\Omega) + m_{12}(111)\, m_3(111) + m_{12}(\Omega)\, m_3(111) \\ &= 0,7 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,4 \\ &= 0,82 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{123}(\Omega) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\Omega} m_{12}(X)\, m_3(Y) \\ &= m_{12}(\Omega)\, m_3(\Omega) \\ &= 0,3 \cdot 0,6 \\ &= 0,18. \end{aligned}$$

Das Messergebnis 111 ist also zu 82 Prozent glaubwürdig.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} m_1(424) = 0,5; &\quad m_1(\Omega) = 0,5; \\ m_2(429) = 0,4; &\quad m_2(\Omega) = 0,6; \\ m_3(429) = 0,4; &\quad m_3(\Omega) = 0,6. \end{aligned}$$

Wir berechnen zuerst das kombinierte Basismaß $m_{23} = m_2 \oplus m_3$ und kombinieren dieses anschließend mit $m_1$.

Der Konfliktgrad $K_{23}$ für $m_{23}$ ist gegeben durch

$$K_{23} = \sum_{X,Y:X\cap Y=\emptyset} m_2(X)\, m_3(Y).$$

Die fokalen Ereignisse bezüglich beider Basismaße sind gerade $\{429\}$ und $\Omega$. Also ergibt sich $K_{23} = 0$, d.h. es liegt kein Konflikt zwischen $m_2$ und $m_3$ vor.
Damit gilt

$$\begin{aligned}
m_{23}(429) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\{429\}} m_2(X)\, m_3(Y) \\
&= m_2(429)\, m_3(\Omega) + m_2(429)\, m_3(429) + m_2(\Omega)\, m_3(429) \\
&= 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 \\
&= 0,64
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
m_{23}(\Omega) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\Omega} m_2(X)\, m_3(Y) \\
&= m_2(\Omega)\, m_3(\Omega) \\
&= 0,6 \cdot 0,6 \\
&= 0,36.
\end{aligned}$$

Nun muss $m_{23}$ noch mit $m_1$ kombiniert werden.

Die fokalen Ereignisse bezüglich $m_1$ sind $\{424\}$ und $\Omega$. Bezüglich $m_{23}$ sind gerade $\{429\}$ und $\Omega$ fokal.
Damit ergibt sich für den Konfliktgrad $K_{123}$:

$$\begin{aligned}
K_{123} &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\emptyset} m_1(X)\, m_{23}(Y) \\
&= m_1(424) m_{23}(429) \\
&= 0,5 \cdot 0,64 \\
&= 0,32.
\end{aligned}$$

Man erhält somit (Endergebnisse gerundet)

$$\begin{aligned}
m_{123}(424) &= \frac{\sum_{X,Y:X\cap Y=\{424\}} m_1(X)\, m_{23}(Y)}{1 - K_{123}} \\
&= \frac{m_1(424)\, m_{23}(\Omega)}{1 - K_{123}} \\
&= \frac{0,5 \cdot 0,36}{0,68} \\
&= 0,26
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{123}(429) &= \frac{\sum_{X,Y:X\cap Y=\{429\}} m_1(X)\, m_{23}(Y)}{1-K_{123}} \\ &= \frac{m_1(\Omega)\, m_{23}(429)}{1-K_{123}} \\ &= \frac{0,5\cdot 0,64}{0,68} \\ &= 0,47 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{123}(\Omega) &= \frac{\sum_{X,Y:X\cap Y=\Omega} m_1(X)\, m_{23}(Y)}{1-K_{123}} \\ &= \frac{m_1(\Omega)\, m_{23}(\Omega)}{1-K_{123}} \\ &= \frac{0,5\cdot 0,36}{0,68} \\ &= 0,26. \end{aligned}$$

c) Für die Basismaße ergibt sich

$$\begin{array}{ll} m_1(A_1) = 0,5; & m_1(\Omega) = 0,5; \\ m_2(A_2) = 0,4; & m_2(\Omega) = 0,6; \\ m_3(A_2) = 0,4; & m_3(\Omega) = 0,6. \end{array}$$

Wir berechnen zuerst das kombinierte Basismaß $m_{23} = m_2 \oplus m_3$ und kombinieren dieses anschließend mit $m_1$.

Der Konfliktgrad $K_{23}$ für $m_{23}$ ist gegeben durch

$$K_{23} = \sum_{X,Y:X\cap Y=\emptyset} m_2(X)\, m_3(Y) = 0.$$

Die fokalen Ereignisse bezüglich beider Basismaße sind gerade $A_2$ und $\Omega$. Es ergibt sich $K_{23} = 0$, d.h. es liegt kein Konflikt zwischen $m_2$ und $m_3$ vor.

Damit gilt

$$\begin{aligned} m_{23}(A_2) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\{A_2\}} m_2(X)\, m_3(Y) \\ &= m_2(\Omega)\, m_3(A_2) + m_2(A_2)\, m_3(A_2) + m_2(A_2)\, m_3(\Omega) \\ &= 0,6\cdot 0,4 + 0,4\cdot 0,4 + 0,4\cdot 0,6 \\ &= 0,64 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{23}(\Omega) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\Omega} m_2(X)\, m_3(Y) \\ &= m_2(\Omega)\, m_3(\Omega) \\ &= 0,6\cdot 0,6 \\ &= 0,36. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird $m_{23}$ mit $m_1$ kombiniert.

Die fokalen Ereignisse bezüglich $m_1$ sind gerade $A_1$ und $\Omega$. Bezüglich $m_{23}$ sind gerade $A_2$ und $\Omega$ fokal. Im Gegensatz zu $\{424\}$ und $\{429\}$ aus Teil b) sind $A_1$ und $A_2$ nicht disjunkt: $A_1 \cap A_2 = \{426, 427\}$.
Für den Konfliktgrad $K_{123}$ erhält man deswegen:

$$\begin{aligned} K_{123} &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\emptyset} m_1(X)\, m_{23}(Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} m_{123}(A_1) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\{A_1\}} m_1(X)\, m_{23}(Y) \\ &= \frac{m_1(A_1)\, m_{23}(\Omega)}{1-K_{123}} \\ &= 0,5 \cdot 0,36 \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{123}(A_2) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=A_2} m_1(X)\, m_{23}(Y) \\ &= m_1(\Omega)\, m_{23}(A_2) \\ &= 0,5 \cdot 0,64 \\ &= 0,32 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{123}(A_1 \cap A_2) &= m_{123}(\{426, 427\}) \\ &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\{426,427\}} m_1(X)\, m_{23}(Y) \\ &= m_1(A_1)\, m_{23}(A_2) \\ &= 0,5 \cdot 0,64 \\ &= 0,32 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m_{123}(\Omega) &= \sum_{X,Y:X\cap Y=\Omega} m_1(X)\, m_{23}(Y) \\ &= m_1(\Omega)\, m_{23}(\Omega) \\ &= 0,5 \cdot 0,36 \\ &= 0,18. \end{aligned}$$

Teil c) unterscheidet sich von Teil b) dadurch, dass eine Unsicherheit der „Länge“ 3 bezüglich der Sensorbeobachtungen berücksichtigt wird. $S_1$ macht die Beobachtung 424, der Glauben $0,5$ wird jedoch dem Intervall

$$[424-3, 424+3] = A_1$$

zugeteilt. $S_2$ und $S_3$ machen die Beobachtung 429, der Glauben $0,4$ wird analog dem Intervall

$$[429 - 3, 429 + 3] = A_2$$

zugewiesen. Dadurch lässt sich explizit berücksichtigen, dass die Beobachtungen 424 und 429 nahe beieinander liegen und der Widerspruch in den Sensorbeobachtungen wird aufgelöst.
Allerdings ist erkennbar, dass durch dieses Vorgehen auch die Information, welche Beobachtungen die drei Sensoren genau machten, verloren geht. Es gilt nämlich $m_1(424) = m_2(429) = m_3(429) = 0$ und $m_{123}(424) = m_{123}(429) = 0$.

## 1.4 Modellierung der Sensorzuverlässigkeit innerhalb der Bayes'schen Theorie

| | |
|---|---|
| wahrer Wert: | $w \in W := \{A, B\}$ |
| Angabe des Sensors: | $s \in S := \{A, B\}$ |
| Zuverlässigkeit des Sensors: | $z \in Z := [0, 1]$ |

Zu modellieren ist $p(w|s, z)$.

Für die gemeinsame Verteilung $p(w, s, z)$ aller drei Größen gilt einerseits

$$p(w, s, z) = p(w|s, z)p(s, z) = p(w|s, z)p(s|z)p(z). \tag{2}$$

Andererseits gilt auch

$$p(w, s, z) = p(s|w, z)p(w, z) = p(s|w, z)p(w|z)p(z). \tag{3}$$

Setzt man (2) und (3) gleich und löst nach der gesuchten Größe $p(w|s, z)$ auf, so erhält man

$$p(w|s, z) = \frac{p(s|w, z)p(w|z)}{p(s|z)}. \tag{4}$$

Da der wahre Wert $w$ nicht von der Zuverlässigkeit $z$ des Sensors abhängen wird, ist es realistisch anzunehmen, dass $p(w|z) = p(w)$ gilt.
$p(s|z)$ hängt nicht von $w$ ab und entspricht somit einer Normierungskonstante.
(4) lässt sich also wie folgt umschreiben:

$$p(w|s, z) = \alpha\, p(s|w, z)\, p(w) \tag{5}$$

Die Sensorzuverlässigkeit kann wie folgt modelliert werden:

$$p(s|w, z) = \frac{1 + z}{2}\, \mathbf{1}_{\{w=s\}} + \frac{1 - z}{2}\, (1 - \mathbf{1}_{\{w=s\}}). \tag{6}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{1}_{\{w=s\}}$ die Indikatorfunktion des Ereignisses $\{w = s\}$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{w=s\}} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad w = s \\ \mathbf{1}_{\{w=s\}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad w \neq s. \end{aligned}$$

Durch diese Modellierung wird erreicht, dass bei einem Sensor mit perfekter Zuverlässigkeit ($z = 1$)

$$p(s|w, z = 1) = \mathbf{1}_{\{w=s\}} \tag{7}$$

und bei einem schlechtest möglichen, „ratenden“ Sensor ($z = 0$)

$$p(s|w, z = 0) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{\{w=s\}} + \frac{1}{2}\,(1 - \mathbf{1}_{\{w=s\}}) = \frac{1}{2}, \tag{8}$$

was dem Prinzip der Maximalen Entropie bzgl. der Sensoraussage entspricht.

Einsetzen von (6) in (5) liefert

$$p(w|s, z) = \alpha \cdot [\frac{1+z}{2}\,\mathbf{1}_{\{w=s\}}\,p(w) + \frac{1-z}{2}\,(1 - \mathbf{1}_{\{w=s\}})\,p(w)]. \tag{9}$$

$p(w)$ ist die A-priori-Verteilung der Zielgröße $w$. Da hier gemäß der Aufgabenstellung kein Vorwissen über $w$ vorliegt, wenden wir das Prinzip der Maximalen Entropie an und erhalten

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Einsetzen von (10) und $s = A$, $z = \frac{6}{10}$ (Aufgabenstellung) in (9) liefert

$$p(w|A, \frac{6}{10}) = \alpha \cdot [\frac{8}{10} \cdot \mathbf{1}_{\{w=s\}} + \frac{2}{10} \cdot (1 - \mathbf{1}_{\{w=s\}})],$$

d.h.

$$\begin{aligned} p(A|A, \frac{6}{10}) &= \frac{8}{10} \cdot \alpha; \\ p(B|A, \frac{6}{10}) &= \frac{2}{10} \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $p(A|A, \frac{6}{10}) + p(B|A, \frac{6}{10}) = 1$ ergibt sich für die Normierungskonstante $\alpha = 1$ und somit

$$\begin{aligned} p(A|A, \frac{6}{10}) &= \frac{8}{10}; \\ p(B|A, \frac{6}{10}) &= \frac{2}{10}. \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Sensorzuverlässigkeit ließe sich durchaus auch auf andere Art modellieren. Die hier gewählte Modellierung interpretiert Unzuverlässigkeit als „Raten“. Man könnte Unzuverlässigkeit auch als „Falschaussage“ interpretieren, die Modellierung nach (6) müsste entsprechend zu

$$p(s|w, z) = z\,\mathbf{1}_{\{w=s\}} + (1 - z)\,(1 - \mathbf{1}_{\{w=s\}})$$

gewählt werden. Des Weiteren ist der lineare Zusammenhang in (6) ebenfalls definiert, andere Zusammenhänge wären denkbar.

# 2 Fuzzy-Systeme

## 2.1 Fuzzy-Mengen und Zugehörigkeitsfunktionen

Bezeichnungen im Folgenden:

| | |
|---|---|
| $A$: | ausdauernd |
| $M$: | motiviert |
| $K$: | kräftig |

| | | Sportler 1 | Sportler 2 | Sportler 3 | Sportler 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $A$ AND $M$ AND $K$ | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,2 |
| b) | (NOT $A$) OR (NOT $M$) OR (NOT $K$) | 0,8 | 0,6 | 0,9 | 0,8 |
| c) | $A$ AND (NOT $A$) | 0,4 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |
| d) | $A$ OR (NOT $A$) | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,8 |

In der klassischen Mengenlehre gilt für beliebige Mengen $B$

$$B \text{ AND } (\text{NOT } B) = \emptyset,$$
$$B \text{ OR } (\text{NOT } B) = \Omega.$$

## 2.2 XOR für Fuzzy-Mengen

$$A \text{ XOR } B = (A \text{ OR } B) \text{ AND } (\text{NOT } (A \text{ AND } B))$$

$$\mu_{A \text{ XOR } B} = \min\left\{\max\left\{\mu_A, \mu_B\right\}, 1 - \min\left\{\mu_A, \mu_B\right\}\right\}$$