Einführung in die Informationsfusion
Lösungen zum Übungsblatt 2

J. Sander, Dr. M. Heizmann
Institut für Anthropomatik
Lehrstuhl für Interaktive Echtzeitsysteme
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Wintersemester 2013/2014

1 Bayes'sche Fusion

1.1 Entropie

Ξ lässt sich in äquidistante Intervalle $[k\Delta, (k+1)\Delta)$ der Länge Δ zerlegen.

Da $p(\xi)$ stetig ist, existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für jedes dieser Intervalle ein $\xi(k) \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$, so dass

$$\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} p(\xi)\mathrm{d}\xi = p(\xi(k))\Delta. \tag{1}$$

Wir definieren die diskrete Zufallsgröße ξ_Δ als diskretisierte Version von ξ dann wie folgt:

$$\xi_\Delta = \xi(k) \Leftrightarrow \xi \in [k\Delta, (k+1)\Delta).$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} H(\Pr(\xi_\Delta)) &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pr(\xi(k))\Delta \log\left(\Pr(\xi(k))\Delta\right) \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pr(\xi(k)) \log\left(\Pr(\xi(k))\right)\Delta - \log\Delta. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta\to 0} -\sum_{-\infty}^{\infty} \Pr(\xi(k)) \log\left(\Pr(\xi(k))\right)\Delta = h(p(\xi)) \\ &\lim_{\Delta\to 0} \log\Delta = -\infty. \end{aligned}$$

Also

$$\lim_{\Delta\to 0} H(\Pr(\xi_\Delta)) = \infty.$$

1.2 Unabhängigkeit; Prinzip der Maximalen Entropie

a) Es bezeichnen
B: Peter hat braune Augen
L: Peter ist Linkshänder

Gesucht ist $\Pr(B,L)$.

Die folgenden Bedingungen müssen erfüllt sein:

I Normiertheit:

$$\Pr(B,L)+\Pr(B,\bar{L})+\Pr(\bar{B},L)+\Pr(\bar{B},\bar{L})=1$$

II Anteil der Schüler mit braunen Augen und der Linkshänder:

$$\Pr(B,L)+\Pr(B,\bar{L})=\frac{1}{3}$$
$$\Pr(B,L)+\Pr(\bar{B},L)=\frac{1}{3}$$

III Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned}\Pr(B,L)&=\Pr(B)\Pr(L)\\ \Pr(B,\bar{L})&=\Pr(B)\Pr(\bar{L})\\ \Pr(\bar{B},L)&=\Pr(\bar{B})\Pr(L)\\ \Pr(\bar{B},\bar{L})&=\Pr(\bar{B})\Pr(\bar{L})\end{aligned}$$

II lässt sich umformen zu

$$\Pr(B,\bar{L})=\frac{1}{3}-\Pr(B,L)\quad\text{(a)}$$
$$\Pr(\bar{B},L)=\frac{1}{3}-\Pr(B,L)\quad\text{(b)}$$

Aus I ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{B},\bar{L})&=1-\Pr(B,L)-\Pr(B,\bar{L})-\Pr(\bar{B},L)\\ &\overset{\text{(a),(b)}}{=}1-\Pr(B,L)-\frac{1}{3}+\Pr(B,L)-\frac{1}{3}+\Pr(B,L)\\ &=\frac{1}{3}+\Pr(B,L)\quad\text{(c)}\end{aligned}$$

Einsetzen von (a), (b), (c) und der Identitäten

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{B})&=1-\Pr(B)\quad\text{(d)}\\ \Pr(\bar{L})&=1-\Pr(L)\quad\text{(e)}\end{aligned}$$

in die vier Bedingungen aus III liefert

$$\Pr(B,L)=\Pr(B)\Pr(L)\quad\text{(f)}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(B,\bar{L}) &= \Pr(B)\Pr(\bar{L})\\
\overset{(a),(e)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} - \Pr(B,L) &= \Pr(B)[1-\Pr(L)]\\
\Longleftrightarrow \frac{1}{3} - \Pr(B,L) &= \Pr(B) - \Pr(B)\Pr(L)\\
\overset{(f)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} - \Pr(B)\Pr(L) &= \Pr(B) - \Pr(B)\Pr(L)\\
\Longleftrightarrow \frac{1}{3} &= \Pr(B) \quad \text{(g)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(\bar{B},L) &= \Pr(\bar{B})\Pr(L)\\
\overset{(b),(d)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} - \Pr(B,L) &= [1-\Pr(B)]\Pr(L)\\
\Longleftrightarrow \frac{1}{3} - \Pr(B,L) &= \Pr(L) - \Pr(B)\Pr(L)\\
\overset{(f)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} - \Pr(B)\Pr(L) &= \Pr(L) - \Pr(B)\Pr(L)\\
\Longleftrightarrow \frac{1}{3} &= \Pr(L) \quad \text{(h)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(\bar{B},\bar{L}) &= \Pr(\bar{B})\Pr(\bar{L})\\
\overset{(c),(d),(e)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} + \Pr(B,L) &= [1-\Pr(B)][1-\Pr(L)]\\
\Longleftrightarrow \frac{1}{3} + \Pr(B,L) &= 1 - \Pr(B) - \Pr(L) + \Pr(B)\Pr(L)\\
\overset{(f)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} + \Pr(B)\Pr(L) &= 1 - \Pr(B) - \Pr(L) + \Pr(B)\Pr(L)\\
\Longleftrightarrow \frac{1}{3} &= 1 - \Pr(B) - \Pr(L)\\
\overset{(g),(h)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\\
\Longleftrightarrow 0 &= 0
\end{aligned}$$

Aus (f) ergibt sich mit (g), (h) somit die eindeutige Lösung $\Pr(B,L) = \frac{1}{9}$.

b) Gesucht ist wieder $\Pr(B,L)$, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:

I Normiertheit:

$$\Pr(B,L) + \Pr(B,\bar{L}) + \Pr(\bar{B},L) + \Pr(\bar{B},\bar{L}) = 1$$

II Anteil der Schüler mit braunen Augen und der Linkshänder:

$$\Pr(B,L) + \Pr(B,\bar{L}) = \frac{1}{3}$$
$$\Pr(B,L) + \Pr(\bar{B},L) = \frac{1}{3}$$

Hieraus ergeben sich wieder die folgenden Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned}
\Pr(B,\bar{L}) &= \frac{1}{3} - \Pr(B,L) \quad \text{(a)}\\
\Pr(\bar{B},L) &= \frac{1}{3} - \Pr(B,L) \quad \text{(b)}\\
\Pr(\bar{B},\bar{L}) &= \frac{1}{3} + \Pr(B,L) \quad \text{(c)}
\end{aligned}$$

Die Maximierung der Entropie $H(\{\Pr(B,L),\Pr(\bar{B},L),\Pr(B,\bar{L}),\Pr(\bar{B},\bar{L})\})$ der Verteilung $\{\Pr(B,L),\Pr(\bar{B},L),\Pr(B,\bar{L}),\Pr(\bar{B},\bar{L})\}$ unter den Bedingungen I und II bedeutet, dass $\Pr(B,L)$ so bestimmt werden muss, dass der Ausdruck

$$\begin{aligned}
& H(\{\Pr(B,L),\Pr(\bar{B},L),\Pr(B,\bar{L}),\Pr(\bar{B},\bar{L})\})\\
= \quad & -\Pr(B,L)\log\Pr(B,L) - \Pr(B,\bar{L})\log\Pr(B,\bar{L})\\
& -\Pr(\bar{B},L)\log\Pr(\bar{B},L) - \Pr(\bar{B},\bar{L})\log\Pr(\bar{B},\bar{L})\\
\overset{\text{(a),(b),(c)}}{=} \quad & -\Pr(B,L)\log\Pr(B,L) - 2(\frac{1}{3} - \Pr(B,L))\log(\frac{1}{3} - \Pr(B,L))\\
& -(\frac{1}{3} + \Pr(B,L))\log(\frac{1}{3} + \Pr(B,L))
\end{aligned}$$

maximal wird.

Verwendet man die Abkürzung $p := \Pr(B,L)$, so muss also das Maximum der Funktion

$$\begin{aligned}
f : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}_{0+}\\
f(p) &= -p\log p - 2\left(\frac{1}{3} - p\right)\log\left(\frac{1}{3} - p\right) - \left(\frac{1}{3} + p\right)\log\left(\frac{1}{3} + p\right)
\end{aligned}$$

bestimmt werden.

Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(p) &= -\log p - 1 + 2\log\left(\frac{1}{3} - p\right) + 2 - \log\left(\frac{1}{3} + p\right) - 1\\
&= -\log p + 2\log\left(\frac{1}{3} - p\right) - \log\left(\frac{1}{3} + p\right)\\
&= -\log\left(p\left(\frac{1}{3} + p\right)\right) + \log\left(\frac{1}{3} - p\right)^2
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& f'(p) = 0\\
\Longleftrightarrow\ & \log\left(p\left(\frac{1}{3} + p\right)\right) = \log\left(\frac{1}{3} - p\right)^2\\
\Longleftrightarrow\ & p = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $p = \frac{1}{9}$ in die zweite Ableitung $f''(p)$ vergewissert man sich, dass $f''(\frac{1}{9}) < 0$ gilt, d.h. $p = \frac{1}{9}$ ist Hochpunkt von $f(p)$.

Somit liefert das Prinzip der maximalen Entropie die eindeutige Lösung $\Pr(B, L) = p = \frac{1}{9}$.

c) In den Aufgabenteilen a) und b) ergab sich jeweils $\Pr(B, L) = \frac{1}{9}$. Zusätzlich war beiden Aufgabenteilen die gesamte Verteilung $\{\Pr(B, L), \Pr(\bar{B}, L), \Pr(B, \bar{L}), \Pr(\bar{B}, \bar{L})\}$ durch $\Pr(B, L)$ eindeutig bestimmt.

Das bedeutet: Die Entropie $H(\{\Pr(B, L), \Pr(\bar{B}, L), \Pr(B, \bar{L}), \Pr(\bar{B}, \bar{L})\})$ wird genau dann maximal, wenn die Unabhängigkeit der Ereignisse "hat braune Augen" und "ist Linkshänder" gilt.

Verallgemeinert man dieses Resultat auf den Fall einer zweidimensionalen diskreten Zufallsgröße $z = (z_1, z_2)$, so ergibt sich:

$H(\Pr(z)) = H(\Pr(z_1, z_2))$ ist genau dann maximal, wenn z_1 und z_2 als unabhängig angenommen werden, d.h. wenn gilt

$$\Pr(z_1, z_2) = \Pr(z_1) \Pr(z_2).$$

Diese Behauptung muss jetzt für den allgemeinen Fall in c) noch bewiesen werden!

Es gilt

$$H(\Pr(z_1, z_2)) = -\sum_{z_2} \sum_{z_1} \Pr(z_1, z_2) \log \Pr(z_1, z_2).$$

Die Definition bedingter Wahrscheinlichkeit liefert

$$\Pr(z_1, z_2) = \Pr(z_1|z_2) \Pr(z_2).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
H(\Pr(z_1, z_2)) &= -\sum_{z_2} \sum_{z_1} \Pr(z_1|z_2) \Pr(z_2) \log \left(\Pr(z_1|z_2) \Pr(z_2)\right) \\
&= -\sum_{z_2} \Pr(z_2) \sum_{z_1} \Pr(z_1|z_2) \left(\log \Pr(z_1|z_2) + \log \Pr(z_2)\right) \\
&= \left(-\sum_{z_2} \Pr(z_2) \sum_{z_1} \Pr(z_1|z_2) \log \Pr(z_1|z_2)\right) + \left(-\sum_{z_2} \Pr(z_2) \log \Pr(z_2)\right) \\
&\overset{(3)}{\leq} \left(-\sum_{z_1} \Pr(z_1) \log \Pr(z_1)\right) + \left(-\sum_{z_2} \Pr(z_2) \log \Pr(z_2)\right) \\
&= H(\Pr(z_1)) + H(\Pr(z_2)).
\end{aligned}$$

$H(\Pr(z_1)) + H(\Pr(z_2))$ ist aber gerade die Entropie von $\Pr(z_1, z_2)$ wenn

z_1 und z_2 unabhängig sind, denn dann gilt:

$$\begin{aligned}
H(\Pr(z_1, z_2)) &= -\sum_{z_2}\sum_{z_1} \Pr(z_1, z_2) \log \Pr(z_1, z_2) \\
&= -\sum_{z_2}\sum_{z_1} \Pr(z_1) \Pr(z_2) \log \left(\Pr(z_1) \Pr(z_2)\right) \\
&= -\sum_{z_2}\sum_{z_1} \Pr(z_1) \Pr(z_2) \left(\log \Pr(z_1) + \log \Pr(z_2)\right) \\
&= -\sum_{z_2}\sum_{z_1} \Pr(z_1) \Pr(z_2) \log \Pr(z_1) - \sum_{z_2}\sum_{z_1} \Pr(z_1) \Pr(z_2) \log \Pr(z_2) \\
&= -\sum_{z_1} \Pr(z_1) \log \Pr(z_1) \sum_{z_2} \Pr(z_2) - \sum_{z_2} \Pr(z_2) \log \Pr(z_2) \sum_{z_1} \Pr(z_1) \\
&= -\sum_{z_1} \Pr(z_1) \log \Pr(z_1) - \sum_{z_2} \Pr(z_2) \log \Pr(z_2) \\
&= H(\Pr(z_1)) + H(\Pr(z_2)).
\end{aligned}$$

Es gilt also: Die Entropie $H(\Pr(z_1, z_2))$ der gemeinsamen Verteilung $\Pr(z_1, z_2)$ ist stets kleiner oder gleich der Summe der Entropien $H(\Pr(z_1))$, $H(\Pr(z_2))$ der Marginalverteilungen $\Pr(z_1)$ und $\Pr(z_2)$. Gleichheit gilt, wenn z_1 und z_2 stochastisch unabhängig sind.

Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

d) Es gilt

$$H(\Pr(z_1)) = -\sum_{z_1} \Pr(z_1) \log \Pr(z_1),$$

d.h. die rechte Seite von (3) ist gerade die Entropie der Marginalverteilung $\Pr(z_1)$.
Die linke Seite von (3) lässt sich folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}
-\sum_{z_2} \Pr(z_2) \sum_{z_1} \Pr(z_1|z_2) \log \Pr(z_1|z_2) &= \sum_{z_2} \Pr(z_2) H(\Pr(z_1|z_2)) \\
&= \mathrm{E}_{\Pr(z_2)}[H(\Pr(z_1|z_2))].
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $H(\Pr(z_1|z_2))$ die Entropie der bedingten Verteilung $\Pr(z_1|z_2)$ (mit fixem z_2) und $\mathrm{E}_{\Pr(z_2)}[\cdot]$ Erwartungswertbildung bezüglich der Verteilung $\Pr(z_2)$.

(3) sagt damit aus, dass das Bedingen einer Größe (z_1) durch eine andere (z_2) die Entropie im Mittel (Erwartungswertbildung!) reduziert.

Die Entropie ist ein Maß für die Unsicherheit. Interpretiert man z_1 als interessierende Größe und z_2 als neue Information bezüglich z_1, so bedeutet (3), dass das Hinzukommen neuer Information im Mittel die Unsicherheit verringert.

Anmerkung: Aufgabenteil c) und d) gelten auch, wenn z_1 und z_2 einen kontinuierlichen Wertebereich haben.

1.3 Bayes'sche Fusion

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Pr(z|d_A) &= \frac{\Pr(d_A|z)\Pr(z)}{\Pr(d_A)} \quad \text{(Satz von Bayes)} \\
&= \alpha \Pr(d_A|z)\Pr(z), \qquad (2)
\end{aligned}$$

wobei α Normierungskonstante für $\Pr(z|d_A)$ ist, so dass

$$\sum_{z \in \{z_A, z_B, z_K\}} \Pr(z|d_A) = 1.$$

Liegt kein Vorwissen über z vor, so liefert das Prinzip der Maximalen Entropie für die A-priori-Verteilung $\Pr(z)$ die Gleichverteilung auf $\{z_A, z_B, z_K\}$, d.h. es gilt

$$(\Pr(z_A); \Pr(z_B); \Pr(z_K)) = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}).$$

Aus der Likelihoodmatrix:

$$(\Pr(d_A|z_A); \Pr(d_A|z_B); \Pr(d_A|z_K)) = (0,45; 0,45; 0,1).$$

(2) liefert also

$$\begin{aligned}
&(\Pr(z_A|d_A); \Pr(z_B|d_A); \Pr(z_K|d_A)) \\
&= \alpha\, (\Pr(d_A|z_A); \Pr(d_A|z_B); \Pr(d_A|z_K)) \otimes (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \\
&= (0,45; 0,45; 0,1).
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet das Symbol $\otimes$ die komponentenweise Multiplikation der Vektoren $(\Pr(d_A|z_A); \Pr(d_A|z_B); \Pr(d_A|z_K))$ und $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

b) Da die die Messungen des Sensors als bedingt unabhängig angenommen werden können, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Pr(z|d_A, d_A) &= \frac{\Pr(d_A, d_A|z)\Pr(z)}{\Pr(d_A, d_A)} \quad \text{(Satz von Bayes)} \\
&= \frac{\Pr(d_A|z)\Pr(d_A|z)\Pr(z)}{\Pr(d_A, d_A)} \quad \text{(Bedingte Unabhängigkeit)} \\
&= \beta \Pr(d_A|z)\Pr(z|d_A) \qquad (3)
\end{aligned}$$

mit Normierungskonstanten β (analog zu α; jetzt aber für $\Pr(z|d_A, d_A)$) und "neuer A-priori-Verteilung" $\Pr(z|d_A)$.

Durch die bedingte Unabhängigkeit ergibt sich also ein sequentielles Fusionsschema: Die Sensorergebnisse können sequentiell fusioniert werden, wobei die A-posteriori-Verteilung aus einem Schritt die A-priori-Verteilung für den nächsten Schritt wird.

Teil a) und (3) liefern also

$$
\begin{aligned}
&(\Pr(z_A|d_A, d_A); \Pr(z_B|d_A, d_A); \Pr(z_K|d_A, d_A)) \\
&= \beta\,(\Pr(d_A|z_A); \Pr(d_A|z_B); \Pr(d_A|z_K)) \otimes (\Pr(z_A|d_A); \Pr(z_B|d_A); \Pr(z_K|d_A)) \\
&= \beta\,(0,45; 0,45; 0,1) \otimes (0,45; 0,45; 0,1) \\
&= (0,488; 0,488; 0,024).
\end{aligned}
$$

1.4 Bayes'sche Fusion

a) Sensor 1: Gute Detektionsleistung, schlechte Klassifikationsleistung.
Sensor 2: Schlechte Detektionsleistung, gute Klassifikationsleistung.

Daher Kombination der beiden Sensoren, um gute Detektion und Klassifikation zu erreichen.

b) Als Zusatzannahme muss gelten, dass die Ergebnisse der beiden Sensoren bedingt unabhängig sind.

Kombinierte Likelihoodmatrizen $\Pr(d^{(1)}, d^{(2)}|z) = \Pr(d^{(1)}|z)\Pr(d^{(2)}|z)$:

- $d^{(1)} = d_A$:

$d^{(2)} =$	d_A	d_B	d_K
z_A	0,2025	0,045	0,2025
z_B	0,045	0,2025	0,2025
z_K	0,045	0,045	0,01

- $d^{(1)} = d_B$:

$d^{(2)} =$	d_A	d_B	d_K
z_A	0,2025	0,045	0,2025
z_B	0,045	0,2025	0,2025
z_K	0,045	0,045	0,01

- $d^{(1)} = d_K$:

$d^{(2)} =$	d_A	d_B	d_K
z_A	0,045	0,01	0,045
z_B	0,01	0,045	0,045
z_K	0,36	0,36	0,08

c) Es gilt

$$\Pr(z|d^{(1)}, d^{(2)}) = \gamma \Pr(z)\Pr(d^{(1)}, d^{(2)}|z)$$

mit einer Normierungskonstanten γ für $\Pr(z|d^{(1)}, d^{(2)})$.

$\Pr(z)$ ist wie in Aufgabe 1.3 die Gleichverteilung auf $\{z_A, z_B, z_K\}$ und $\Pr(d^{(1)}, d^{(2)}|z)$ wurde im Aufgabenteil zuvor berechnet.

Man erhält

$$
\begin{aligned}
&(\Pr(z_A|d_A, d_A); \Pr(z_B|d_A, d_A); \Pr(z_K|d_A, d_A)) \\
&= \gamma_1(0,2025; 0,045; 0,045) \otimes (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \\
&= (0,692; 0,154; 0,154)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\Pr(z_A|d_A, d_B); \Pr(z_B|d_A, d_B); \Pr(z_K|d_A, d_B)) \\
&= \gamma_2(0,045; 0,2025; 0,045) \otimes (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \\
&= (0,154; 0,692; 0,154)
\end{aligned}
$$

[Sensor 1: Detektion; Sensor 2: Klassifikation]

$$
\begin{aligned}
&(\Pr(z_A|d_A, d_K); \Pr(z_B|d_A, d_K); \Pr(z_K|d_A, d_K)) \\
&= \gamma_3(0,2025; 0,2025; 0,01) \otimes (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \\
&= (0,488; 0,488; 0,024)
\end{aligned}
$$

[Sensor 1: Detektion; Sensor 2 versagt: keine Klassifikation]

d) Sei $\Pr_1$ die lokale A-posteriori-Verteilung von Sensor 1. Es gilt:

$$(\Pr_1(z_A|d_A); \Pr_1(z_B|d_A); \Pr_1(z_K|d_A)) = (0,45; 0,45; 0,1). \tag{4}$$

Sei $\Pr_2$ die lokale A-posteriori-Verteilung von Sensor 2. Es gilt:

$$(\Pr_2(z_A|d_A); \Pr_2(z_B|d_A); \Pr_2(z_K|d_A)) = (0,45; 0,1; 0,45). \tag{5}$$

Verteilte Fusion (mit (4), (5)):

$$\Pr(z|d_A, d_A) = \delta \Pr(z) \left[\frac{\Pr_1(z|d_A)}{\Pr(z)}\right] \left[\frac{\Pr_2(z|d_A)}{\Pr(z)}\right]$$

mit einer Normierungskonstanten δ für $\Pr(z|d_A, d_A)$.

Man erhält damit

$$(\Pr(z_A|d_A, d_A); \Pr(z_B|d_A, d_A); \Pr(z_K|d_A, d_A)) = (0,692; 0,154; 0,154)$$

Weitere Beobachtung d_A vom zweiten Sensor:

Verteilte Fusion liefert

$$\Pr(z|d_A, d_A, d_A) = \zeta \Pr(z|d_A, d_A) \left[\frac{\Pr_2(z|d_A)}{\Pr(z)}\right]$$

mit einer Normierungskonstanten ζ für $\Pr(z|d_A, d_A, d_A)$.

Man erhält

$$
\begin{aligned}
&(\Pr(z_A|d_A, d_A, d_A); \Pr(z_B|d_A, d_A, d_A); \Pr(z_K|d_A, d_A, d_A)) \\
&= (0,786; 0,039; 0,175).
\end{aligned}
$$

1.5 Bayes'sche Fusion

Die Log-A-posteriori-Verteilung ergibt sich bis auf eine additive Konstante durch die *Summation* der Log-A-priori-Verteilung und der Log-Übergangswahrscheinlichkeiten.

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\log(\Pr(z|d_A, d_A)) \\
&= \log\left(\frac{\Pr(d_A, d_A|z)\Pr(z)}{\Pr(d_A, d_A)}\right) \quad \text{(Satz von Bayes)} \\
&= \log(\Pr(d_A|z)) + \log(\Pr(d_A|z)) + \log(\Pr(z)) - \log(\Pr(d_A, d_A))
\end{aligned}$$

Da $\Pr(z)$ in der Aufgabenstellung konstant für alle $z \in \{z_A, z_B, z_K\}$ ist, kann man statt des kompletten Terms $\log(\Pr(z)) - \log(\Pr(d_A, d_A))$ eine additive Konstante η für $\Pr(z|d_A, d_A)$ verwenden.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&(\log(\Pr(z_A|d_A, d_A)); \log(\Pr(z_B|d_A, d_A)); \log(\Pr(z_K|d_A, d_A))) \\
&= (-0,799; -0,799; -2,303) + (-0,799; -2,303; -0,799) + \eta \\
&= (-1,598; -3,102; -3,102) + \eta \\
&= (-0,368; -1,872; -1,872)
\end{aligned}$$

Dabei ergab sich $\eta = -1,230$ aus der Normiertheitsbedingung

$$\sum_{z \in \{z_A, z_B, z_K\}} \Pr(z|d_A, d_A) = 1.$$

1.6 Bayes'sche Fusion

Die (binäre) Zufallsvariable z gebe an, ob der Patient an der Krankheit leidet:

$$\begin{aligned}
z = w&\text{: Der Patient hat die Krankheit} \\
z = f&\text{: Der Patient ist nicht erkrankt.}
\end{aligned}$$

Die (binäre) Zufallsvariable d gebe an, ob der Test das Ergebnis "erkrankt" liefert:

$$\begin{aligned}
d = w&\text{: Testergebnis lautet "erkrankt"} \\
d = f&\text{: Testergebnis lautet "nicht erkrankt".}
\end{aligned}$$

Die A-priori-Verteilung von z ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\Pr(z = w) &= 0,01 \quad \text{(Zahl der Erkrankungen in der Bevölkerung)} \\
\Pr(z = f) &= 1 - \Pr(z = w) = 0,99.
\end{aligned}$$

Die angegebene Erkennungsrate und die Falschalarmrate liefern:

$$\begin{aligned}
&\Pr(d = w|z = w) = 0,9 \quad \text{(Erkennungsrate)} \\
&\quad \Rightarrow \Pr(d = f|z = w) = 1 - \Pr(d = w|z = w) = 0,1 \\
&\Pr(d = w|z = f) = 0,2 \quad \text{(Falschalarmrate)} \\
&\quad \Rightarrow \Pr(d = f|z = f) = 1 - \Pr(d = w|z = f) = 0,8.
\end{aligned}$$

Gesucht ist $\Pr(z = w|d = w)$.

Diese Wahrscheinlichkeit scheint auf den ersten Blick recht groß zu sein, denn der Test hat eine hohe Erkennungsrate und eine niedrige Falschalarmrate.

Die Anwendung des Satzes von Bayes liefert jedoch entgegen dieser Vermutung

$$\begin{aligned}
\Pr(z = w|d = w) &= \frac{\Pr(d = w|z = w)\Pr(z = w)}{\Pr(d = w)} \\
&= \frac{\Pr(d = w|z = w)\Pr(z = w)}{\Pr(d = w|z = w)\Pr(z = w) + \Pr(d = w|z = f)\Pr(z = f)} \\
&= \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,9 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,99} \\
&= 0,043
\end{aligned}$$