Einführung in die Informationsfusion
Lösungen zum Übungsblatt 1

J. Sander, Dr. M. Heizmann
Institut für Anthropomatik
Lehrstuhl für Interaktive Echtzeitsysteme
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Wintersemester 2013/2014

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Stochastische Unabhängigkeit

A und B sind stochastisch unabhängig $\Longleftrightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$

a)

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cap \bar{B}) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\
&= \Pr(A) - \Pr(A)\Pr(B) \\
&= \Pr(A)[1 - \Pr(B)] \\
&= \Pr(A)\Pr(\bar{B})
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\Pr(\bar{A} \cap B) &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\
&= \Pr(B) - \Pr(A)\Pr(B) \\
&= [1 - \Pr(A)]\Pr(B) \\
&= \Pr(\bar{A})\Pr(B)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap \bar{B}) - \Pr(\bar{A} \cap B) \\
&= 1 - \Pr(A)\Pr(B) - \Pr(A)\Pr(\bar{B}) - \Pr(\bar{A})\Pr(B) \\
&= 1 - \Pr(A)\Pr(B) - \Pr(A)[1 - \Pr(B)] - [1 - \Pr(A)]\Pr(B) \\
&= 1 - \Pr(A)\Pr(B) - \Pr(A) + \Pr(A)\Pr(B) - \Pr(B) + \Pr(A)\Pr(B) \\
&= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A)\Pr(B) \\
&= [1 - \Pr(A)][1 - \Pr(B)] \\
&= \Pr(\bar{A})\Pr(\bar{B})
\end{aligned}$$

1.2 Stochastische Unabhängigkeit

Grundraum $\Omega = \underbrace{\{1,2,3,4,5,6\}}_{\text{Augenzahl von Würfel 1}} \times \underbrace{\{1,2,3,4,5,6\}}_{\text{Augenzahl von Würfel 2}}$

Jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ hat die Form $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ mit $\omega_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}$ und $\omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Es gilt $\Pr(\omega) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$.

Mengentheoretische Beschreibung der Ereignisse A, B und C:

$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \,|\, \omega_1 \in \{1,3,5\},\, \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \,|\, \omega_1 \in \{1,2,3,4,5,6\},\, \omega_2 \in \{1,3,5\}\}$

$C = C_1 \cup C_2$ mit
$C_1 := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \,|\, \omega_1 \in \{1,3,5\},\, \omega_2 \in \{2,4,6\}\}$,
$C_2 := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \,|\, \omega_1 \in \{2,4,6\},\, \omega_2 \in \{1,3,5\}\}$

Schnittmengen bilden:

$A \cap B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \,|\, \omega_1 \in \{1,3,5\},\, \omega_2 \in \{1,3,5\}\}$

$A \cap C = C_1$

$B \cap C = C_2$

$A \cap B \cap C = \emptyset$

Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$\Pr(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{2}$

$\Pr(B) = \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Pr(C) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Pr(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

$\Pr(A \cap C) = \Pr(C_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

$\Pr(B \cap C) = \Pr(C_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(\emptyset) = 0$

Unabhängigkeit prüfen:

$\Pr(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr(A)\Pr(B)$

$\Pr(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr(A)\Pr(C)$

$\Pr(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr(B)\Pr(C)$

$\Pr(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$

$\Longrightarrow$ **Die Ereignisse A, B, C sind nicht stochastisch unabhängig. Sie sind lediglich paarweise stochastisch unabhängig.**

1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Grundraum Ω wie in Aufgabe 1.2.

a) Es bezeichne D das Ereignis, mit den 2 Würfeln die Augensumme 6 zu würfeln. Gesucht ist $\Pr(D)$.

   $D = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$

   $\Pr(D) = \frac{5}{36}$

b) Es bezeichne E das Ereignis, dass mindestens einer der Würfel eine gerade Augenzahl zeigt. Gesucht ist $\Pr(D|E)$.

   $E = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),$
   $(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

   $\Pr(E) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

   $\Pr(D \cap E) = \Pr(\{(2,4),(4,2)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

   $\Pr(D|E) = \frac{\Pr(D \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{27}$

1.4 Kenngrößen von Verteilungen

Grundraum Ω wie in Aufgabe 1.2.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Mögliche Werte für die Augensumme der beiden Würfel: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.

x (Wert von X)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X^{-1}(x)$ (mögliche Urbilder aus Ω)	(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (6,4)	(5,6) (6,5)	(6,6)
$\Pr(X = x)$ **Wahrscheinlichkeitsfunktion**	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\Pr(X \le x)$ **kum. Verteilungsfunktion**	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Anmerkung:
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\Pr(X = x)$ und die kumulative Verteilungsfunktion $\Pr(X \leq x)$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Angabe der in der Tabelle stehenden Werte reicht jedoch aus, denn es gilt

$$\Pr(X = x) = 0 \quad \text{für } x \notin \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

und

$$\Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ \Pr(X \leq \lfloor x \rfloor) & \text{für } 2 \leq x < 12 \\ 1 & \text{für } x \geq 12 \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Für den Erwartungswert ergibt sich mittels der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{X\} &= \sum_{x=2}^{12} x \cdot \Pr(X = x) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} \\ &\quad + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Anmerkung:
Zur Berechnung des Erwartungswertes ist auch folgende Rechnung möglich:
X_1: Ergebnis von Würfel 1
X_2: Ergebnis von Würfel 2
$X = X_1 + X_2$
$\mathrm{E}\{X\} = \mathrm{E}\{X_1\} + \mathrm{E}\{X_2\} = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$ (Linearität des Erwartungswertes)

1.5 Kenngrößen von Verteilungen

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^{\infty} \beta \cdot \exp(-\alpha x)dx \\ &= \left[-\frac{\beta}{\alpha} \cdot \exp(-\alpha x) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Damit $f(x)$ eine Verteilungsdichtefunktion sein kann, muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Das bedeutet nach obiger Rechnung aber gerade, dass $\alpha = \beta$ gelten muss.

b) Partielle Integrationsregel:

$$\int_a^b g(x) \cdot h'(x)dx = [g(x) \cdot h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) \cdot h(x)dx$$

Mittels partieller Integration ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} x \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha x)dx \\
&= [-x \cdot \exp(-\alpha x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-\exp(-\alpha x))dx \\
&\quad \text{[Partielle Integration mit } g(x) = x,\ h'(x) = \alpha \cdot \exp(-\alpha x)\text{]} \\
&= 0 + \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{\alpha} \cdot \exp(-\alpha x)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

Für die Varianz von X gilt die Formel $\mathrm{Var}\{X\} = \mathrm{E}\{X^2\} - (\mathrm{E}\{X\})^2$. $\mathrm{E}\{X^2\}$ lässt sich mittels zweifacher Anwendung der partiellen Integrationsregel berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{X^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} x^2 \cdot \alpha \cdot \exp(-\alpha x)dx \\
&= \left[-x^2 \cdot \exp(-\alpha x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x \cdot (-\exp(-\alpha x))dx \\
&\quad \text{[Partielle Integration mit } g(x) = x^2,\ h'(x) = \alpha \cdot \exp(-\alpha x)\text{]} \\
&= 0 + 2\int_0^{\infty} x \cdot \exp(-\alpha x)dx \\
&= 2\int_0^{\infty} x \cdot \exp(-\alpha x)dx \\
&= 2\left(\left[-\frac{1}{\alpha} \cdot x \cdot \exp(-\alpha x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\alpha} \cdot \exp(-\alpha x)\right) dx\right) \\
&\quad \text{[Partielle Integration mit } g(x) = x,\ h'(x) = \exp(-\alpha x)\text{]} \\
&= 0 + \frac{2}{\alpha}\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x)dx \\
&= \frac{2}{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha} \cdot \exp(-\alpha x)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{2}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{X\} &= \mathrm{E}\{X^2\} - (\mathrm{E}\{X\})^2 \\
&= \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

1.6 Formel von Bayes

S bezeichne das Ereignis, dass eine eingehende E-Mail Spam ist.
F sei das Ereignis, dass eine eingehende E-Mail das Wort FREE enthält.

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr(S|F)$.

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich die folgenden Größen:
$\Pr(S) = \frac{7}{10}$
$\Pr(\bar{S}) = \frac{3}{10}$
$\Pr(F|S) = \frac{9}{10}$
$\Pr(F|\bar{S}) = \frac{1}{100}$

$\Pr(S|F)$ lässt sich mit der Formel von Bayes folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
\Pr(S|F) &= \frac{\Pr(F|S) \cdot \Pr(S)}{\Pr(F|S) \cdot \Pr(S) + \Pr(F|\bar{S}) \cdot \Pr(\bar{S})} \\
&= \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{100} \cdot \frac{3}{10}} \\
&= \frac{210}{211} \\
&\simeq 0,9953
\end{aligned}$$