7. Energiefunktionale

Inhaltsübersicht

Ziel: **Universeller Ansatz zur Formalisierung von Fusionsproblemen**

- Einführung von „Energie“termen E_k zur Modellierung der fusionsrelevanten Informationen:
  - Verfügbare Daten (A-priori-Wissen)
  - Gewünschte Eigenschaften des Fusionsresultats
  - Forderungen (Constraints) bzgl. der zu fusionierenden Daten, Zwischengrößen, Fusionsergebnisse
  - Wechselseitige Beziehungen der vorhandenen Daten
- Implizite, kompakte Darstellung der Fusionsaufgabe

7.1 Formulierung von Energiefunktionalen

Repräsentation der Fusionsaufgabe durch ein **Energiefunktional**:

$$\boxed{E := \sum_k \lambda_k E_k\,, \quad \lambda_k > 0}$$

- Gesamtenergie: Gewichtete Summe der Einzelenergien
- Berücksichtigung unterschiedlicher Relevanz durch Vorfaktoren λ_k
- Modellierung der Terme E_k so, dass fusionsrelevante Informationen monoton widergespiegelt werden:
  Erwünschtere Eigenschaft $\leftrightarrow$ geringerer Wert des Terms
- Meist quadratische Formulierung der Terme E_k
- Zusatzinformationen einbeziehbar durch entsprechende Energieterme
- Fusion durch simultane Minimierung des Energiefunktionals bezüglich des Fusionsresultates (Optimierungsproblem)

Problem: Keine universell anwendbare Optimierungsmethode zur Minimierung der Gesamtenergie E

7.1 Formulierung von Energiefunktionalen

<u>Beispiel:</u>

$$
\begin{aligned}
E(r) &= \lambda_1 E_d(d,r) + \lambda_2 E_c(r) \qquad \lambda_i > 0 \\
&= \lambda_1 \left(E_d(d,r) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} E_c(r) \right) \\
&\propto E_d(d,r) + \lambda\, E_c(r)
\end{aligned}
$$

$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$: Bilddaten (Beobachtungen)
$r(\boldsymbol{x})$: Fusionsergebnis

- $E_d(.,.)$: Modelliert den Zusammenhang zwischen Beobachtungen $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ und Fusionsergebnis $r(\boldsymbol{x})$
- $E_c(.)$: Modelliert erwünschte oder a priori bekannte Eigenschaften von $r(\boldsymbol{x})$ (Constraints)
- $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$: Regularisierungsparameter zur Gewichtung der Einzelenergien

Beispiel: Glättung eines eindimensionalen beobachteten Signals

$$d(x):[a,b]\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ansatz: Minimierung eines Energiefunktionals bzgl. des Resultats

$$r(x):[a,b]\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$E(r) := E_d(d,r) + \lambda\, E_c(r)$$

$$= \int \left(r(x) - d(x)\right)^2 \mathrm{d}\, x + \lambda \int \left(\mathrm{L}\{r(x)\}\right)^2 \mathrm{d}\, x$$

L: Ableitungsoperator, wähle z.B. $\mathrm{L}\{.\} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}$.

- Struktur von E:
  - 1.Term: Datenterm E_d
    $\rightarrow$ Resultat r soll nahe bei d liegen
  - 2.Term: Glättungsterm E_c, Gewichtungsfaktor λ
    $\rightarrow$ Resultats r soll keine Sprünge aufweisen und möglichst kleine Ableitung besitzen
- E positiv definit und quadratisch $\rightarrow$ i.d.R. eindeutiges Minimum

7.1 Formulierung von Energiefunktionalen

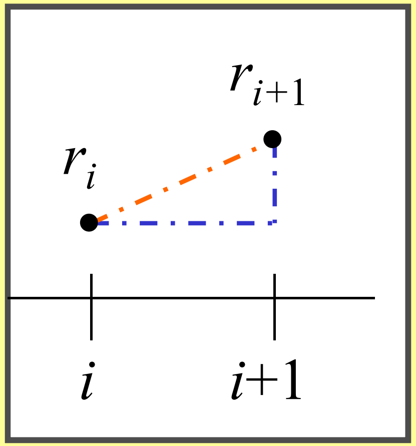
- Diskretisierung: Einführung eines äquidistanten Gitters G auf $[a,b]$:

$$\mathrm{G} = \{a + ih \mid i = 0,\ldots,N\} \text{ mit } N = \frac{b-a}{h}$$

$$\boldsymbol{r} := (r_0,\ldots,r_N)^{\mathrm{T}} \text{ mit } r_i := r(a+ih),\ i = 0,\ldots,N$$

- Glättungsterm: Summe der Differenzen $r_{i+1} - r_i$

- Diskretisierte Formulierung für $E(r)$:



$$E(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=0}^{N} (r_i - d_i)^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (r_{i+1} - r_i)^2$$

Gibbs'sche Verteilung mit Energiefunktional E :

$$\pi_{\beta,E}(x) = \frac{1}{Z} \mathrm{e}^{-\beta E(x)}$$

mit Z : Normierungskonstante.

$\beta = 1/T$: „inverse Temperatur"

Interpretationsmöglichkeit aus der statistischen Physik:

Es sei $E : V \to \mathbb{R}$, V endlich

V : Menge aller Konfigurationen eines physikalischen Systems

$E(x)$: Energie des Systems, wenn es sich in der Konfiguration x befindet

T : Temperatur

$\pi_{\beta,E}(x)$: Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in der Konfiguration x befindet

T groß : Alle Konfigurationen etwa gleich wahrscheinlich

T klein : Konfigurationen mit niedriger Energie bevorzugt

7.2 Bayes‘sche Interpretation

Definiere für E eine Gibbs‘sche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF):

$$\boxed{\text{WDF} \propto \mathrm{e}^{-\beta E} = \prod_k \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_k E_k}{T}}}$$

Minimierung des Energiefunktionals E:
ist äquivalent zur
Maximierung der Gibbs‘schen Verteilung:

$$\min_{\boldsymbol{r}} \{E(\boldsymbol{r})\} \to \boldsymbol{r}_{\mathrm{opt}}$$

$$\max_{\boldsymbol{r}} \left\{\mathrm{e}^{-\beta E(\boldsymbol{r})}\right\} \to \boldsymbol{r}_{\mathrm{opt}}$$

Vorteile dieser Verfahrensweise:

- Multiplikation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen statt Summation von Energiefunktionen
- Quadratische Energiefunktionen → Gauß‘sche Dichten
- Alle Optimierungsprobleme, die durch Minimierung von Energiefunktionalen erhalten werden, lassen sich in Bayes‘scher Statistik ausdrücken

<u>Beispiel:</u> Glättung einer eindimensionalen Funktion

Zugehörige Gibbs'sche Verteilung:

$$\Pr(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{d}) := \frac{\mathrm{e}^{-\beta E(\boldsymbol{r})}}{Z} = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\beta\left(\sum_{i=0}^{N}(r_i-d_i)^2+\lambda\sum_{i=0}^{N-1}(r_{i+1}-r_i)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{Z}\prod_{i=0}^{N}\mathrm{e}^{-\beta(r_i-d_i)^2}\prod_{i=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\beta\lambda(r_{i+1}-r_i)^2}$$

Interpretation:

$$\Pr(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{d}) \propto \Pr(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{r})\Pr(\boldsymbol{r})$$

$\Pr(\boldsymbol{d}|\boldsymbol{r})$: Bedingte Wahrscheinlichkeit für $\boldsymbol{d}$ gegeben $\boldsymbol{r}$

$\Pr(\boldsymbol{r})$: A-priori-„Wahrscheinlichkeit", allerdings:

$\Pr(\boldsymbol{r}) = \Pr(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{c}),\quad \boldsymbol{c} = \text{const.}$: Aussage nur über relative Werte von $\boldsymbol{r}$

$\Pr(\boldsymbol{r})$ ist nicht normierbar

7.3 Energieminimierung

- Direkte Lösung eines linearen Gleichungssystems
  (Selten möglich)

<u>Beispiel:</u> (s.o.) $E(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{N} (r_i - d_i)^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} (r_{i+1} - r_i)^2$

$$\frac{1}{2} \partial r_i \, E(\mathbf{r}) = r_i - d_i + \lambda (2r_i - r_{i+1} - r_{i-1}) \overset{!}{=} 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, N-1$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & & \\ & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \\ & & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ d_{i-1} \\ d_i \\ d_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

($i = 0,\ i = N$ vernachlässigt)

keine Glättung: $\lambda = 0 \quad \Rightarrow r_i = d_i$

7.3 Energieminimierung

- Graph-Cuts-Verfahren
  Analogie: Maximum-Flow-/Minimum-Cut-Problem
- Approximative Lösung durch sukzessive Optimierung
  Konzept: Energieterme nacheinander optimieren
- Methode des steilsten Abstiegs
  Iteration $\boldsymbol{r}^{(j+1)} = \boldsymbol{r}^{(j)} - K\,\nabla E\left(\boldsymbol{r}^{(j)}\right)$
  mit Startwert $\boldsymbol{r}^{(0)}$, Konstante K
  Zu prüfen: $E\left(\boldsymbol{r}^{(j)}\right)$ monoton fallend in j
  $$\Rightarrow E\left(\boldsymbol{r}^{(j)}\right) \rightarrow \min_{\boldsymbol{r}} E(\boldsymbol{r})$$
  Problematisch: Steckenbleiben in lokalem Minimum, Erkennung?
- Monte-Carlo-Methode
  Idee: Konfigurationen $\boldsymbol{r}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit zufällig wählen
  Fusionsergebnis: $\boldsymbol{r}_{\text{opt}} = \arg\min_{\boldsymbol{r}} E(\boldsymbol{r})$
  Problematisch: Auffinden des globalen Minimums
  unwahrscheinlich bei großem Suchbereich

7.3 Energieminimierung

- Simulated Annealing
- Lineare Programme
- Dynamische Programmierung
- Mean Field Theorie
  Konzept: Betrachtung von Erwartungswerten anstelle Zufallsvariablen

Literatur

- Clark, James J.; Yuille, Alan L.: *Data Fusion for Sensory Information Processing Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- Geiger, D.; Girosi, F.: *Parallel and deterministic algorithms from MRFs: Integration and Surface Reconstruction*. MIT AI Lab Memo No. TR-1114, Juni 1989.
- Hall, David L.; Llinas, James: *Handbook of Multisensor Data Fusion*. CRC Press, 2001.
- Beyerer, J.; Heizmann, M.; Sander, J.; Gheta, I.: *Bayesian methods for image fusion*. In: Image Fusion: Algorithms and Applications, Stathaki, T. (Hrsg.), Academic Press, Amsterdam, S. 157-192, 2008