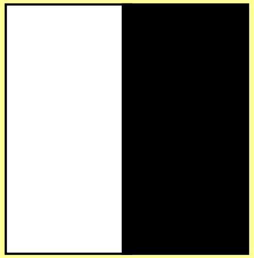
4. Fuzzy-Systeme

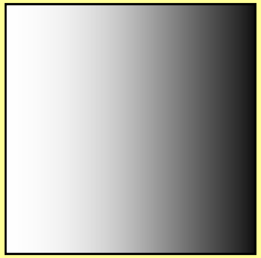
Inhaltsübersicht

4.1 Fuzzy-Systeme – Überblick

- Fuzzy (engl.): „unscharf“, „verschwommen“
- **Fuzzy-Mengen**: Verkörperung unscharfer Aussagen
- **Fuzzy-Logik** (Lotfi A. Zadeh, 1965):
  - Mengenoperationen auf Fuzzy-Mengen
  - Ähnlichkeit mit mehrwertigen Logiken (Zwischenwerten zwischen „wahr“ und „falsch“), aber unterschiedliche Interpretation der Werte
- Klassische Logik: Sonderfall innerhalb der Fuzzy-Logik



klassische
binäre Logik



mehrwertige Logik,
Fuzzy-Logik

- Wichtige Anwendungen: Regelungstechnik, künstliche Intelligenz, Informationsfusion usw.

Einsatzgebiete von Fuzzy-Systemen:

- Unzureichende mathematische Modellierung:
  - Nur empirisch bekannte (evtl. qualitative) Zusammenhänge
  - Schwierig zu handhabendes Modell (z.B. Nichtlinearitäten)
- Sprachlich formulierte Regeln (z.B. linguistisches Expertenwissen)
- Starkes Beobachtungsrauschen (z.B. durch ungenaue, billige Sensoren)

Auf den Einsatz sollte in folgenden Fällen eher verzichtet werden:

- Existenz eines einfachen mathematischen Modells, z.B. probabilistische Modellierbarkeit
- Ausreichend gute Ergebnisse bei konventionellen Verfahren
- Nicht lösbares Problem

Unsicherheit und Unschärfe

- Präzises Wissen: Keine Unsicherheit, keine Unschärfe

> Bsp.: „Die Wassertemperatur t beträgt (genau) 40°C."
> $\rightarrow$ t numerische Größe, fester Wert $t = 40$

- Unsicheres Wissen: Wahrscheinlichkeiten, Basismaße
  Abbildung einer Zufallsvariable auf Wahrscheinlichkeiten

> Bsp.: „Die Wassertemperatur t liegt mit Wahrscheinlichkeit p_0 zwischen 30°C und 50°C."
> $\rightarrow$ t numerische Zufallsvariable,
> Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Pr(t \in [30, 50]) = p_0$

- Vages (unscharfes) Wissen: Linguistische Beschreibung
  Abbildung einer (numerischen) Größe auf eine linguistische Variable

> Bsp.: „ Die Wassertemperatur t beträgt 40°C, das Wasser ist heiß."
> $\rightarrow$ Abbildung von t auf eine linguistische Variable (z.B. mit Termen kalt, warm, heiß) mit Hilfe von Zugehörigkeitsfunktionen

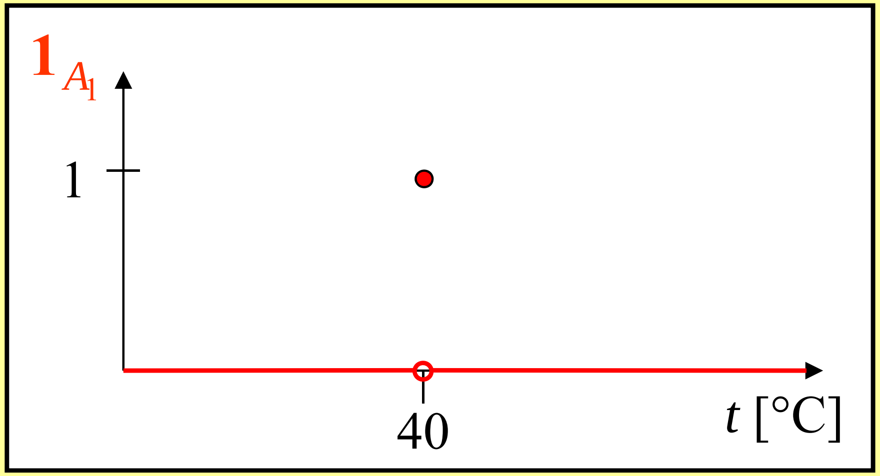
Klassische Mengentheorie: Scharfe Mengen:
Elemente gehören entweder zu einer Menge oder nicht

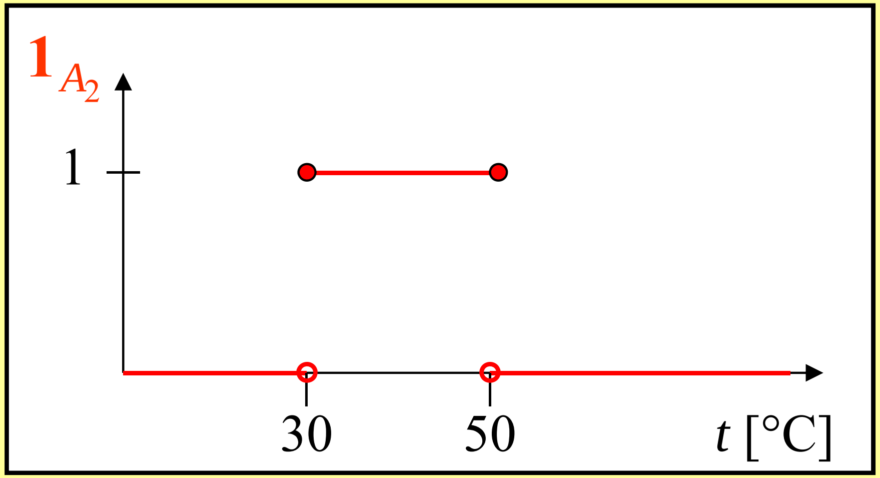
Beschreibung mittels (klassischer) Indikatorfunktion: $\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

<u>Beispiel:</u> $\Omega = \mathbb{R}_{0+}$ Wertebereich einer Variable t (Temperatur)

$A_1 := \{t \in \Omega \,|\, t = 40\}$ $\quad A_2 := \{t \in \Omega \,|\, 30 \le t \le 50\}$

$$\mathbf{1}_{A_1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t = 40 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \mathbf{1}_{A_2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 30 \le t \le 50 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$





4.2 Fuzzy-Mengen

Linguistische Variablen zur Formulierung unscharfen Wissens:
Übergang von numerischen Größen zu linguistischen Termen

<u>Beispiel:</u> Linguistische Beschreibung einer Temperatur

Übergang: Numerische Variable $t \to$ linguistische Variable $\mathcal{T}$
Festlegung der Terme von $\mathcal{T}$: sehr kalt, kalt, kühl, warm, heiß, sehr heiß

Gesucht: z.B. $A := \{t \in \Omega \mid t°\mathrm{C}\ \text{sind heiß}\}$ bzw. $\overline{A} := \{t \in \Omega \mid t°\mathrm{C}\ \text{sind nicht heiß}\}$

Festlegung $A := \{t \in \Omega \mid t \geq 30°\mathrm{C}\}$ sinnvoll?

Nein, denn….

- Warum gelten $30°\mathrm{C}$ als heiß, $29{,}999°\mathrm{C}$ nicht?
- $40°\mathrm{C}$ lassen sich *deutlicher* als $30°\mathrm{C}$ als „heiß" einordnen
- Könnten $30°\mathrm{C}$ nicht ebenso *gerade noch nicht heiß* sein?

$\to$ Keine scharfen Grenzen zwischen „heiß" und „nicht heiß"

<u>Ansatz:</u> Einführung von Fuzzy-Mengen (unscharfen Mengen) durch **Verallgemeinerung der klassischen Indikatorfunktion**

Fuzzy-Mengen: Erweiterung des Mengenbegriffs auf **unscharfe Mengen**

- Modellierung durch Zugehörigkeitsfunktion (membership function) μ_A : Abbildung des Wertebereichs einer Eingangsvariablen zu einer Fuzzy-Menge, die einen linguistischen Term repräsentiert
- Kontinuierlicher Grad der Zugehörigkeit

$$A := \{t \in \Omega \mid t \text{ hat eine bestimmte Eigenschaft}\} \qquad A \subseteq \Omega$$

$$\mu_A : \Omega \to [0,1]$$

$$\mu_A(t) = r \quad :\Leftrightarrow \quad t \text{ gehört zu } A \text{ mit Grad } r \qquad r \in [0,1]$$

$$\mu_A(t) + \mu_{\Omega \setminus A}(t) = 1 \quad \forall t$$

- Spezialfälle: $\mu_A(t) = 1 \Leftrightarrow$ t gehört (sicher) zu A

  $\mu_A(t) = 0 \Leftrightarrow$ t gehört (sicher) nicht zu A
- Sonderfall klassische Mengentheorie: $\mu_A(t) \in \{0,1\} \forall t$

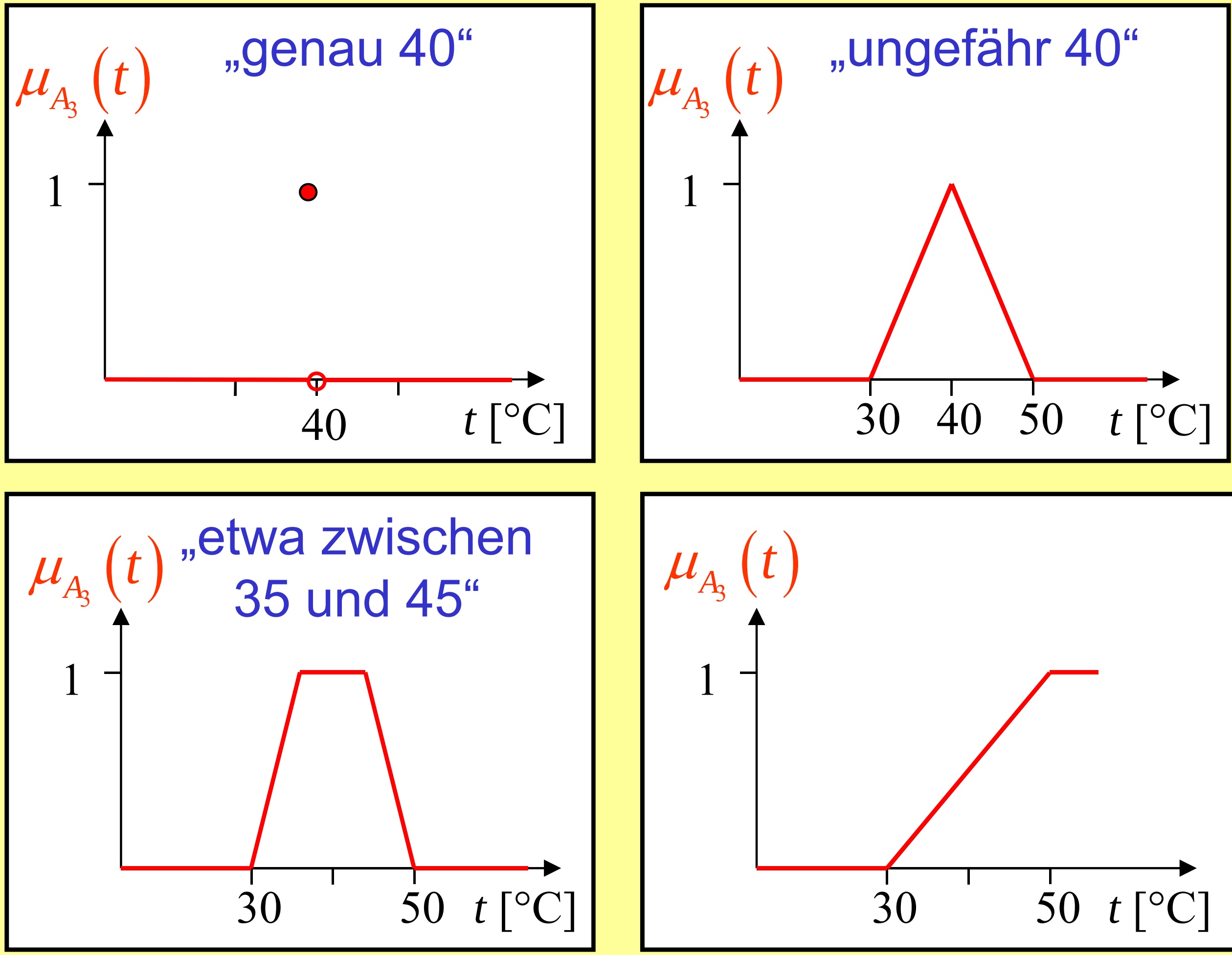
  μ_A: klassische Indikatorfunktion

  A : scharfe Menge (crisp set)

4.2 Fuzzy-Mengen

<u>Beispiel:</u> $A_3 := \{t \in \Omega \mid t\,°\mathrm{C} \text{ sind heiß}\}$

$\rightarrow$ Wähle geeignete Zugehörigkeitsfunktion für „heiß“, z.B.



Temperaturen $\leq$ 30°: nicht heiß

40°: heiß vom Grad 0.5

Temperaturen $\geq$ 50°: heiß

Kriterien: Aufgabenstellung, Informationsquelle, Handhabbarkeit, …

4.3 Fuzzifizierung

- Transformation der vorliegenden Information in Fuzzy-konforme Form
- Abbildung numerischer Variablen in linguistische Variablen
- Werte einer linguistischen Variablen: Terme

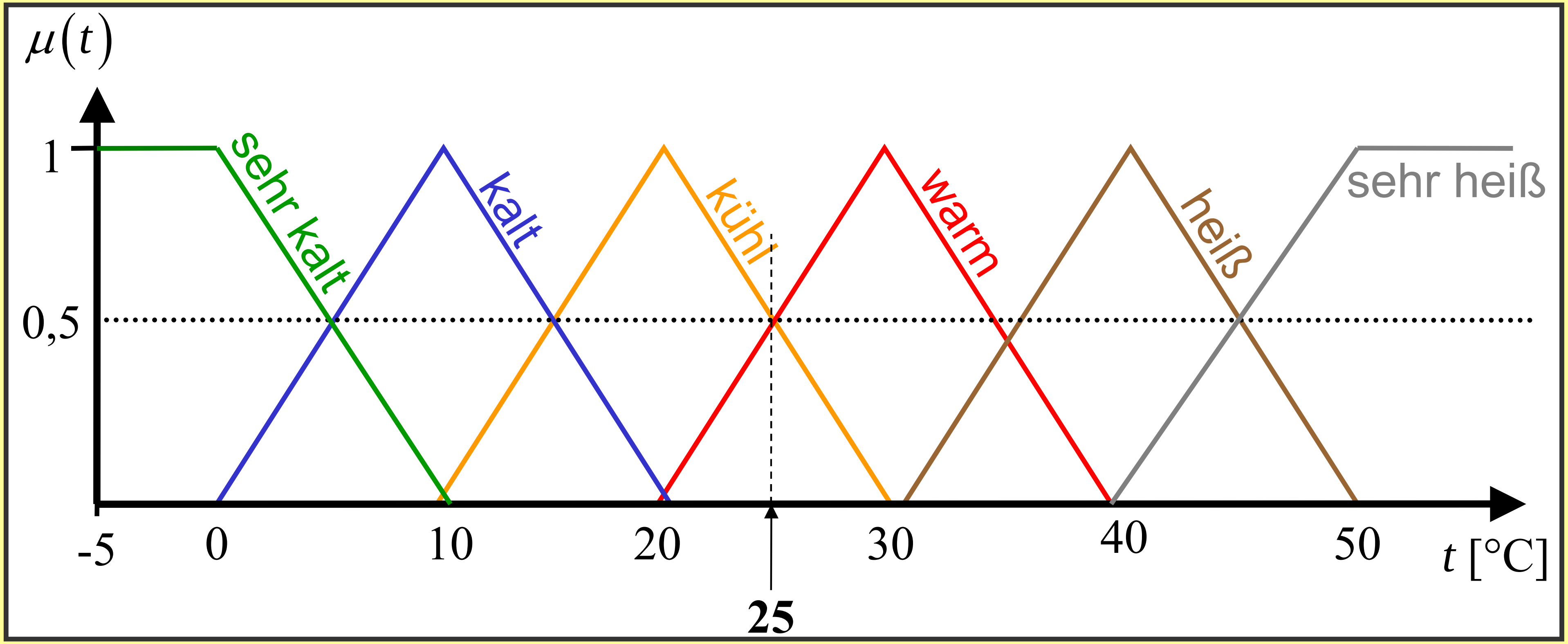
Beispiel: Die Wassertemperatur kann als linguistische Variable mit den Termen

sehr kalt, kalt, kühl, warm, heiß, sehr heiß

aufgefasst werden.

- Freiheit in der Wahl der Terme: Aufgabenstellung, erforderliche Trennschärfe, ...
- Keine direkte Verarbeitbarkeit linguistischer Variablen bzw. Terme
- Daher Verarbeitung der zugehörigen Fuzzy-Mengen:
  Zuordnung einer Fuzzy-Menge zu jedem Term mit geeigneter Zugehörigkeitsfunktion

Beispiel: Darstellung einer linguistischen Variablen Temperatur T



→ Temperatur von 25°C ist

- warm und kühl jeweils mit Grad 0,5
- nicht: sehr kalt, kalt, heiß, sehr heiß

Fuzzy-Logik: Verknüpfung unscharfer Aussagen

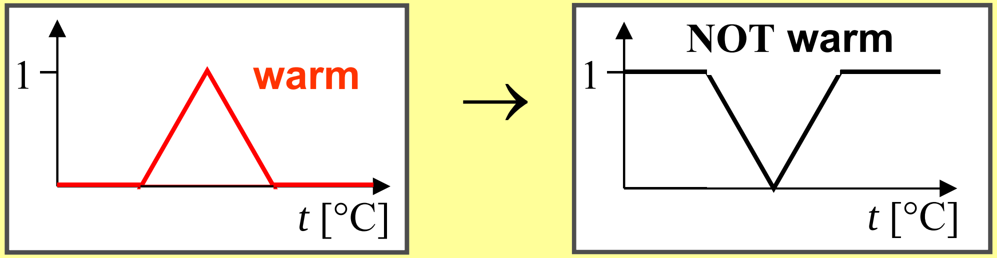
- Dazu Verknüpfung linguistischer Terme mittels Anwendung von Regeln, die als (unscharfe) Mengenoperationen auf den zugehörigen unscharfen Mengen umgesetzt werden
- Grundoperationen wie in der klassischen Logik:
  Negation (NOT), Konjunktion (AND), Disjunktion (OR)
  → Realisierung aller möglichen logischen Verknüpfungen auf Fuzzy-Mengen
- Erweiterung der Grundoperationen aus der klassischen Logik:
  - Konjunktion → T-Norm
  - Disjunktion → T-Conorm
- Umsetzung der Grundoperationen mittels der Zugehörigkeitsfunktionen

Grundoperationen:

Negation

$$\text{NOT } A = \Omega \setminus A$$
$$\equiv$$
$$\mu_{\Omega \setminus A}(t) = 1 - \mu_A(t)$$

Beispiel:

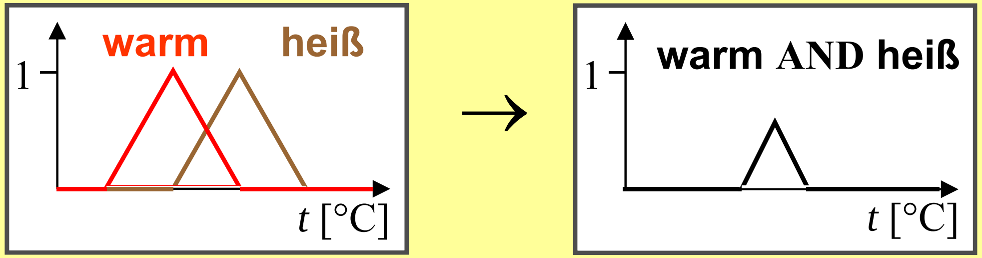


Konjunktion

z.B. Minimum-T-Norm:

$$A \text{ AND } B = A \cap B$$
$$\equiv$$
$$\mu_{A \cap B}(t) = \min\{\mu_A(t), \mu_B(t)\}$$

Beispiel:

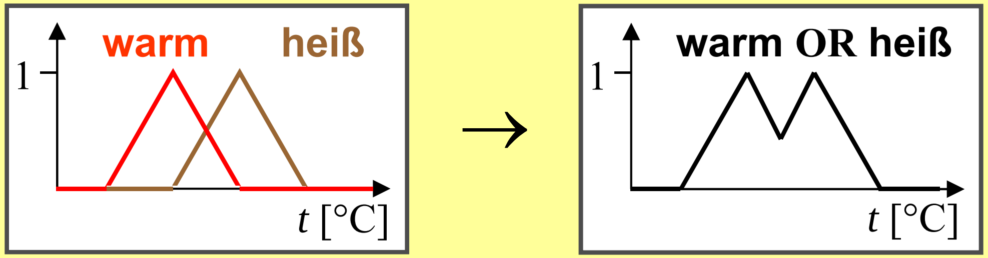


Disjunktion

z.B. Maximum-T-Conorm:

$$A \text{ OR } B = A \cup B$$
$$\equiv$$
$$\mu_{A \cup B}(t) = \max\{\mu_A(t), \mu_B(t)\}$$

Beispiel:



Analogie zur klassischen Mengenlehre:

- Assoziativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Kommutativität

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

- Idempotenz

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

- Distributivität

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- De Morgansche Gesetze

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \qquad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

- Absorption

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

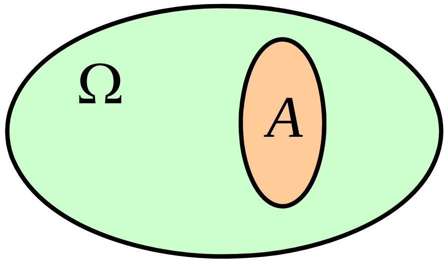
Ausnahmen:

- Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
  (Tertium non datur, excluded middle):
  Für eine beliebige Aussage muss mindestens sie selbst oder ihr Gegenteil gelten.

- Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch:
  Zwei beliebige einander widersprechende Aussagen können nicht beide zutreffen.

Klassische Mengenlehre:

$$(\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\cap} A) \cup (\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ \overline{A}}}{\setminus} A) = \Omega \qquad (\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ A}}{\cap} A) \cap (\Omega \underset{\substack{\uparrow\\ \overline{A}}}{\setminus} A) = \varnothing$$

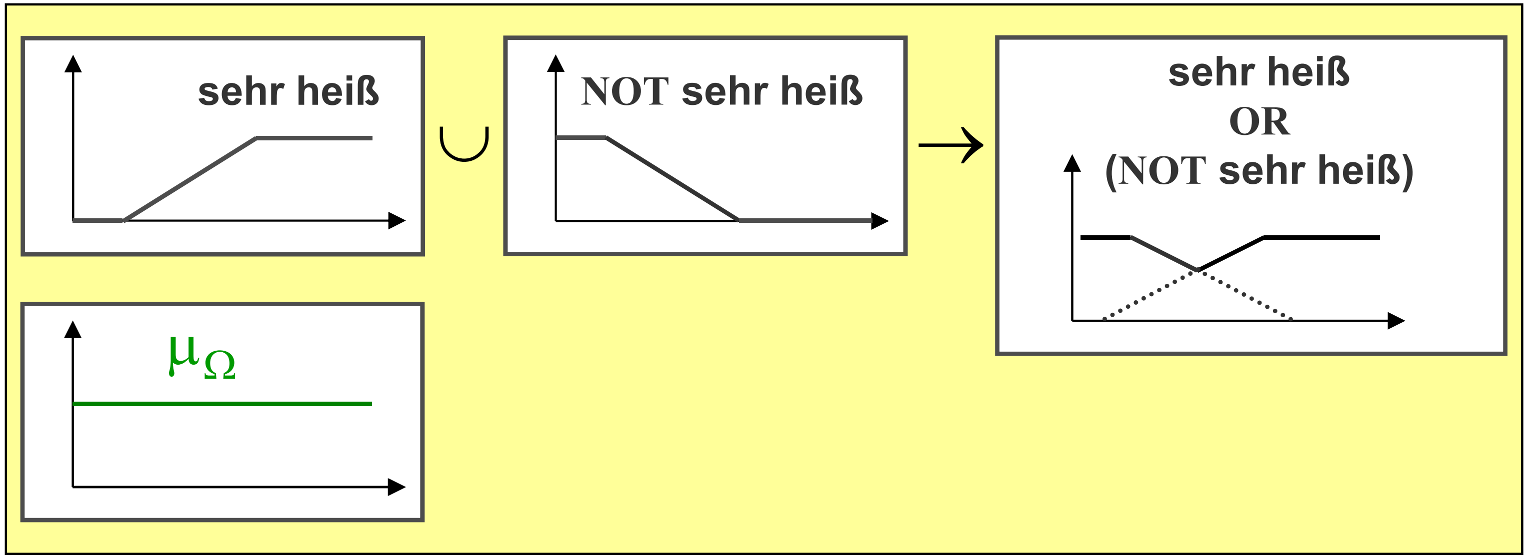


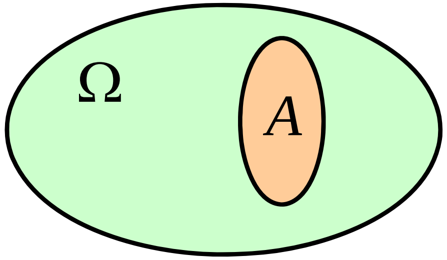
Ausnahme: Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten gilt in der Fuzzy-Logik im Allgemeinen *nicht*:

$$(\Omega \cap A) \cup (\Omega \setminus A)$$

i.A.

$$\neq \Omega$$

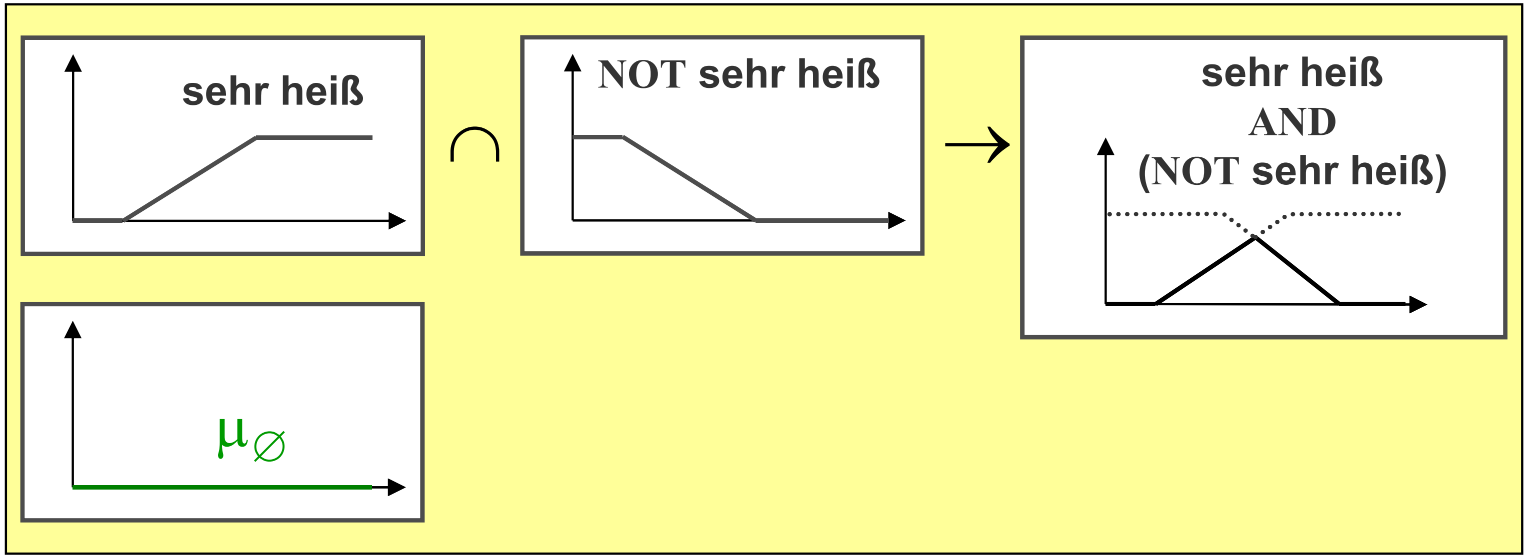




$$(\Omega \cap A) \cap (\Omega \setminus A)$$

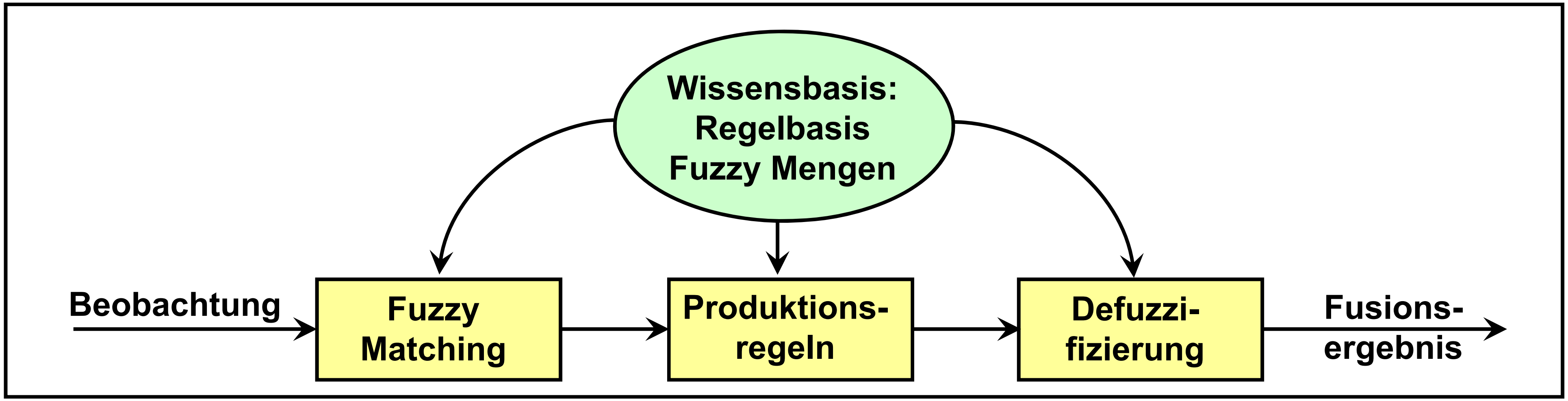
i.A.

$$\neq \varnothing$$



Ablauf der Fusion:

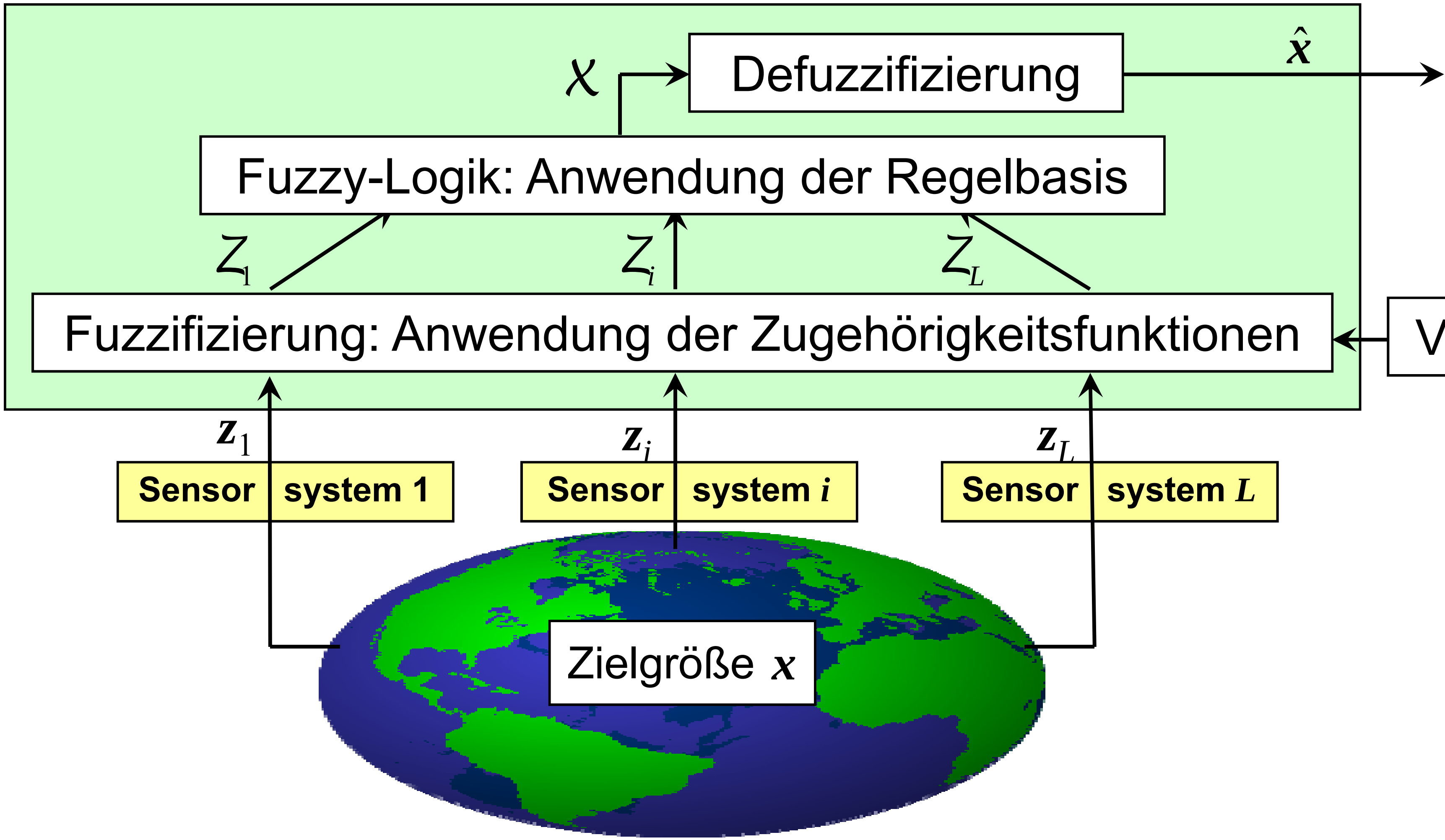
- Regelbasis (für linguistische Variablen): Formulierung von Vorwissen (Experten- und Erfahrungswissen)
- Fuzzy-Mengen: Modellierung der unscharfen (linguistischen) Terme
- Fuzzy-Matching (Fuzzifizierung): Abbildung der Beobachtung auf Fuzzy-Mengen
- Produktionsregeln: Gewinnung des (unscharfen) Fusionsergebnisses durch Anwendung der Regelbasis
- Defuzzifizierung: Umsetzung in ein „scharfes“ Fusionsergebnisses



4.5 Fuzzy-Fusion

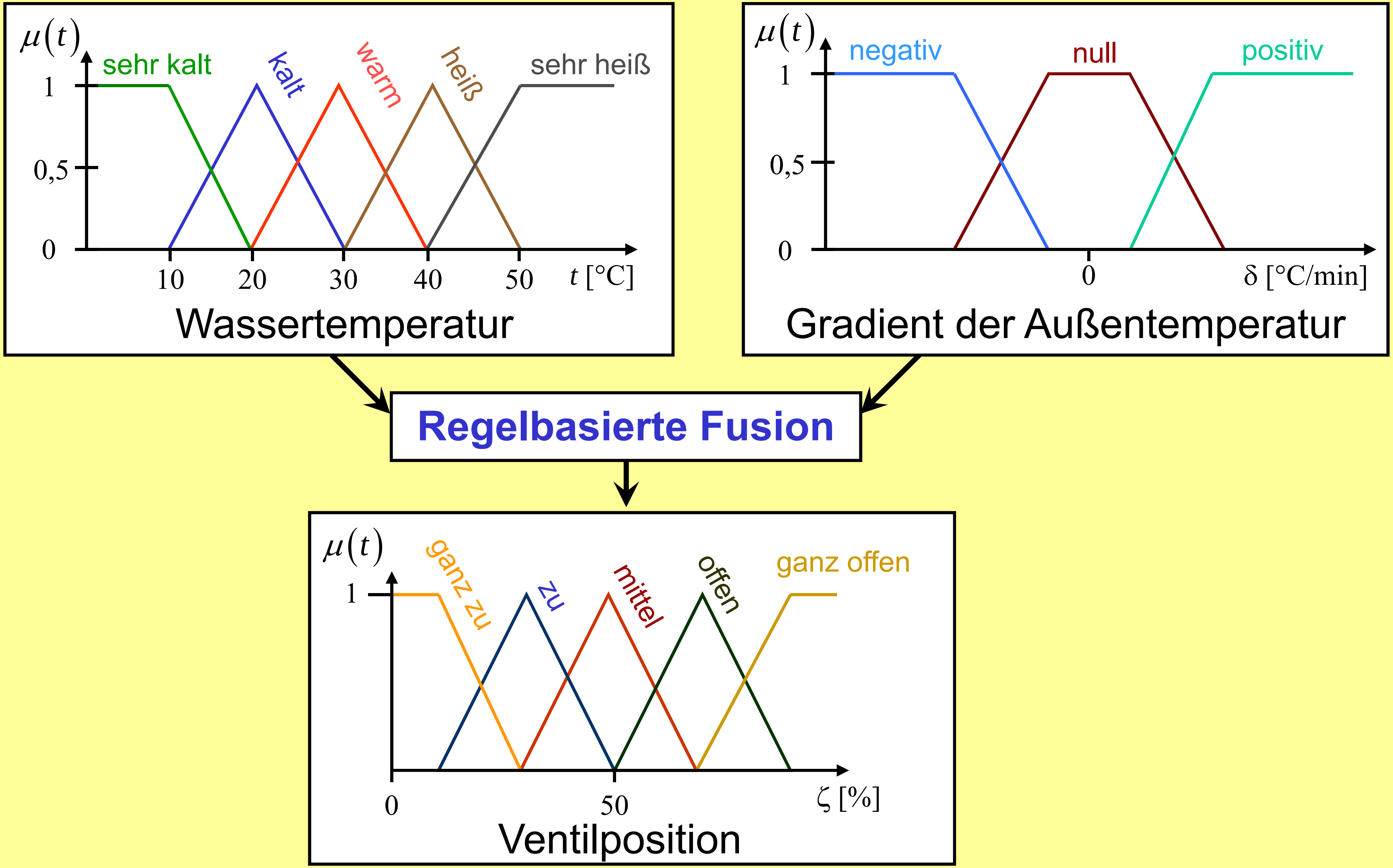
Realisierung der Fusion (Bsp. zentralisiert):

- Linguistische Terme, Zugehörigkeitsfunktionen, Regelbasis, Defuzzifizierung werden vorab berechnet bzw. festgelegt
- Wesentliche Verarbeitung in der Zentraleinheit



4.5 Fuzzy-Fusion

Beispiel: Heizungsregelung



Fuzzy-Regeln: Verknüpfung der Eingangs-Fuzzy-Mengen mit den Ausgangs-Fuzzy-Mengen
Abbildung von Vorwissen

Produktionsregel R: IF P THEN C

P: Eingangsgröße, Prämisse,

C: Ausgangsgröße, Konklusion

Beispiel:

R_1: IF Temperatur sehr kalt AND Gradient negativ THEN Ventilposition ganz offen

R_2: IF Temperatur heiß AND Gradient negativ THEN Ventilposition zu

Regelbasen zur Formulierung von Expertenwissen:

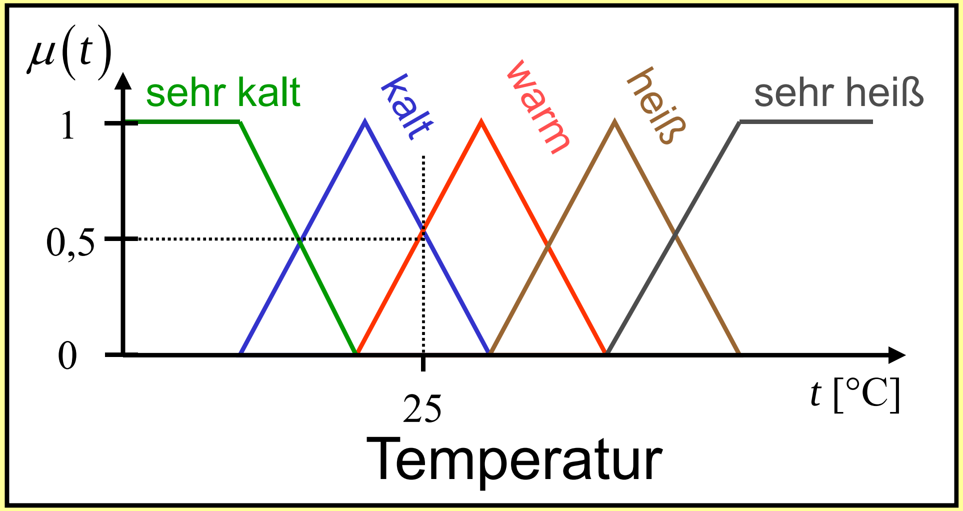
Zusammenfassung der Produktionsregeln $R_1,\ldots,R_n$ in einer Regeltabelle

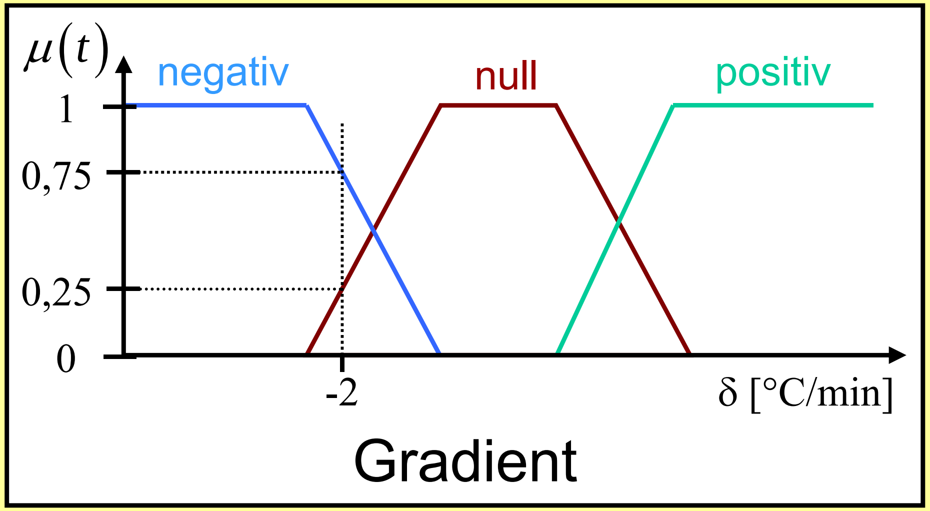
Beispiel: 15 Regeln

AND		Gradient		
		negativ	null	positiv
Temperatur	sehr kalt	ganz offen	ganz offen	offen
	kalt	ganz offen	offen	offen
	warm	mittel	mittel	zu
	heiß	zu	zu	ganz zu
	sehr heiß	zu	ganz zu	ganz zu

Beispiel: Heizungsregelung

Eingangsgrößen: Temperatur 25°C, Gradient -2°C/min





$$\mu_{\text{kalt}}(25°\text{C}) = 0{,}5$$
$$\mu_{\text{warm}}(25°\text{C}) = 0{,}5$$

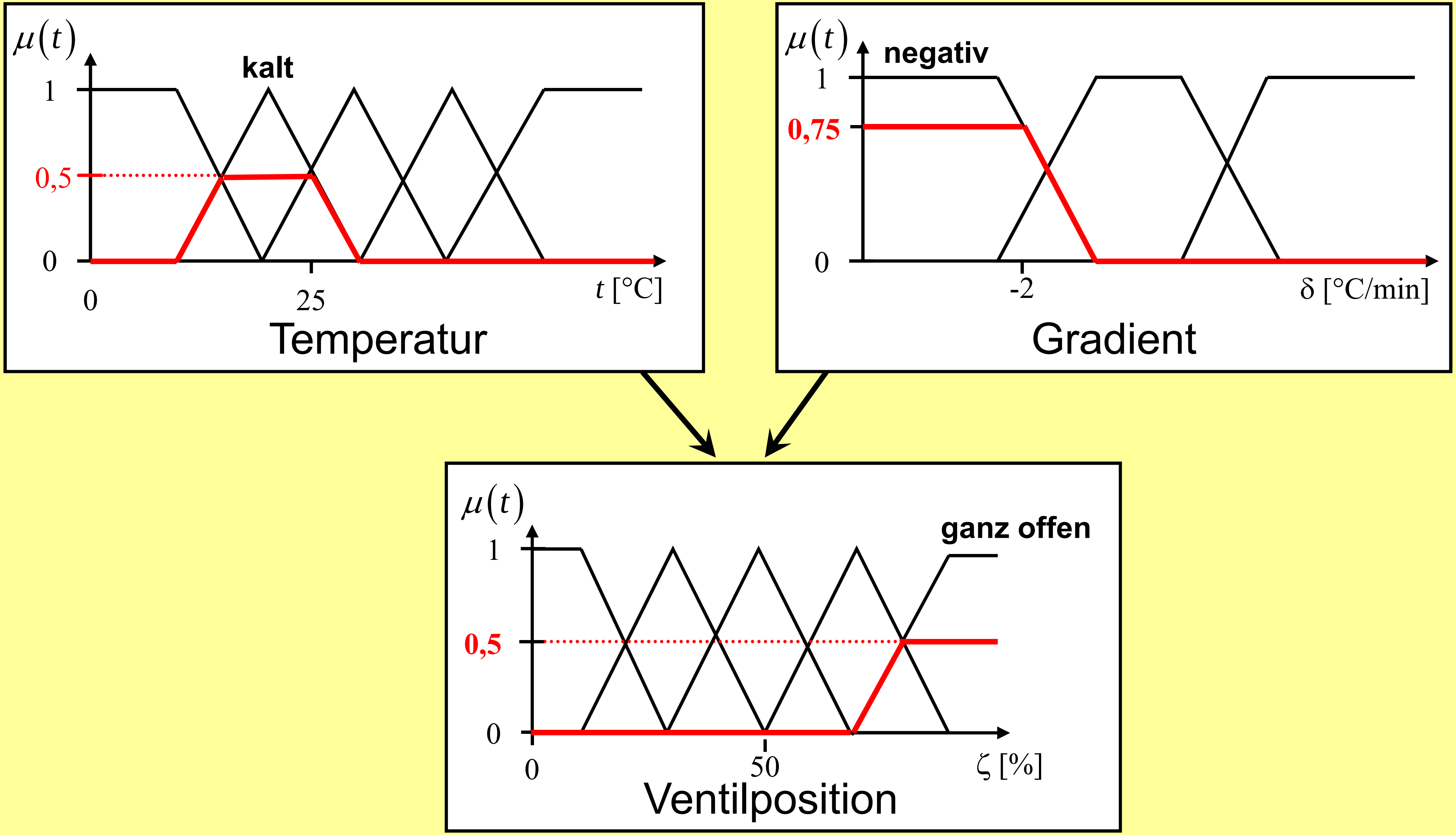
$$\mu_{\text{negativ}}(-2°\text{C}/\min) = 0{,}75$$
$$\mu_{\text{null}}(-2°\text{C}/\min) = 0{,}25$$

Anzuwendende AND-Regeln nach Regelbasis:

1. IF Temperatur kalt AND Gradient negativ THEN Ventil ganz offen
2. IF Temperatur kalt AND Gradient null THEN Ventil offen
3. IF Temperatur warm AND Gradient negativ THEN Ventil mittel
4. IF Temperatur warm AND Gradient null THEN Ventil mittel

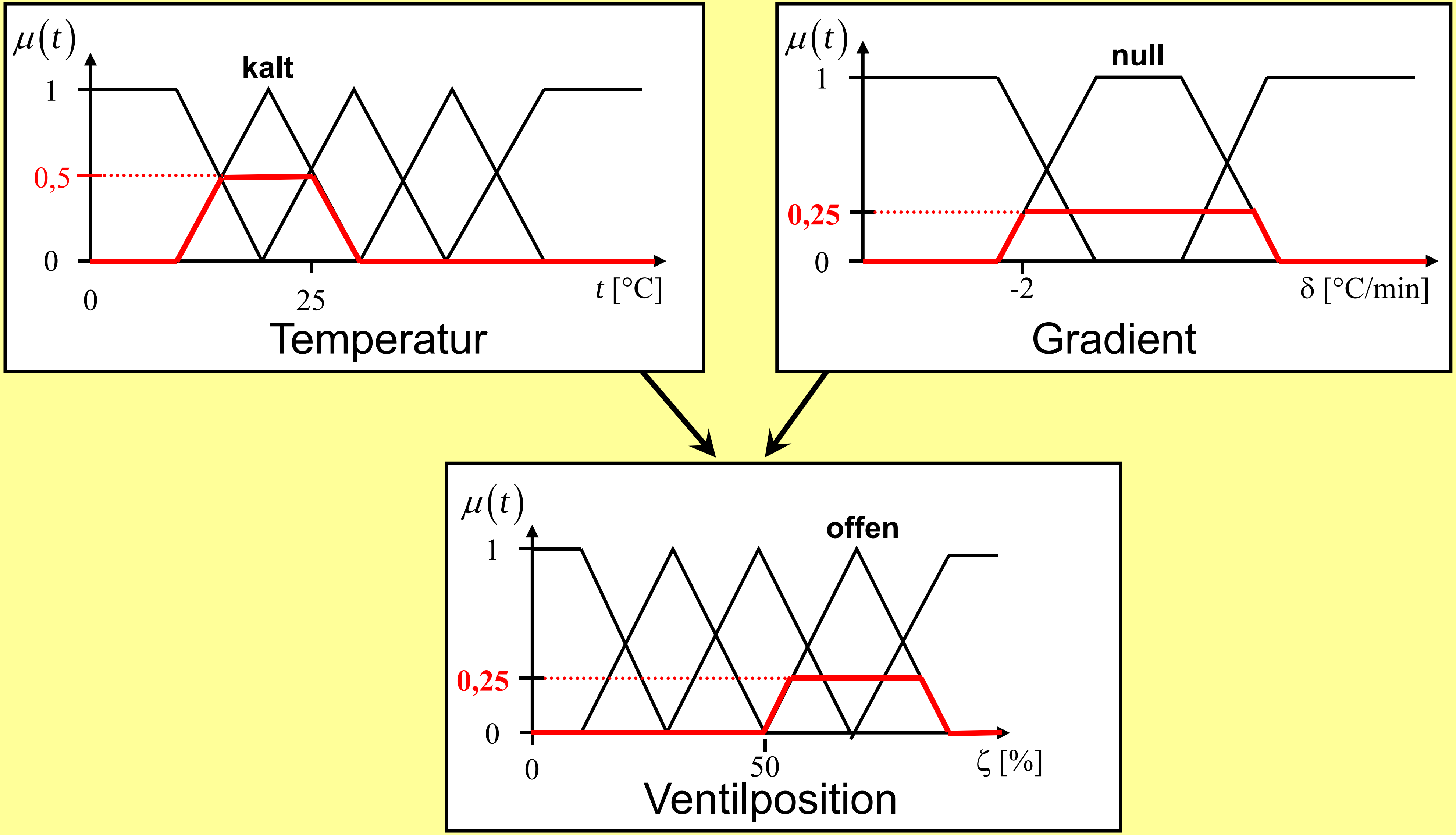
Beispiel: Heizungsregelung

Regel 1: IF Temperatur kalt AND Gradient negativ THEN Ventil ganz offen



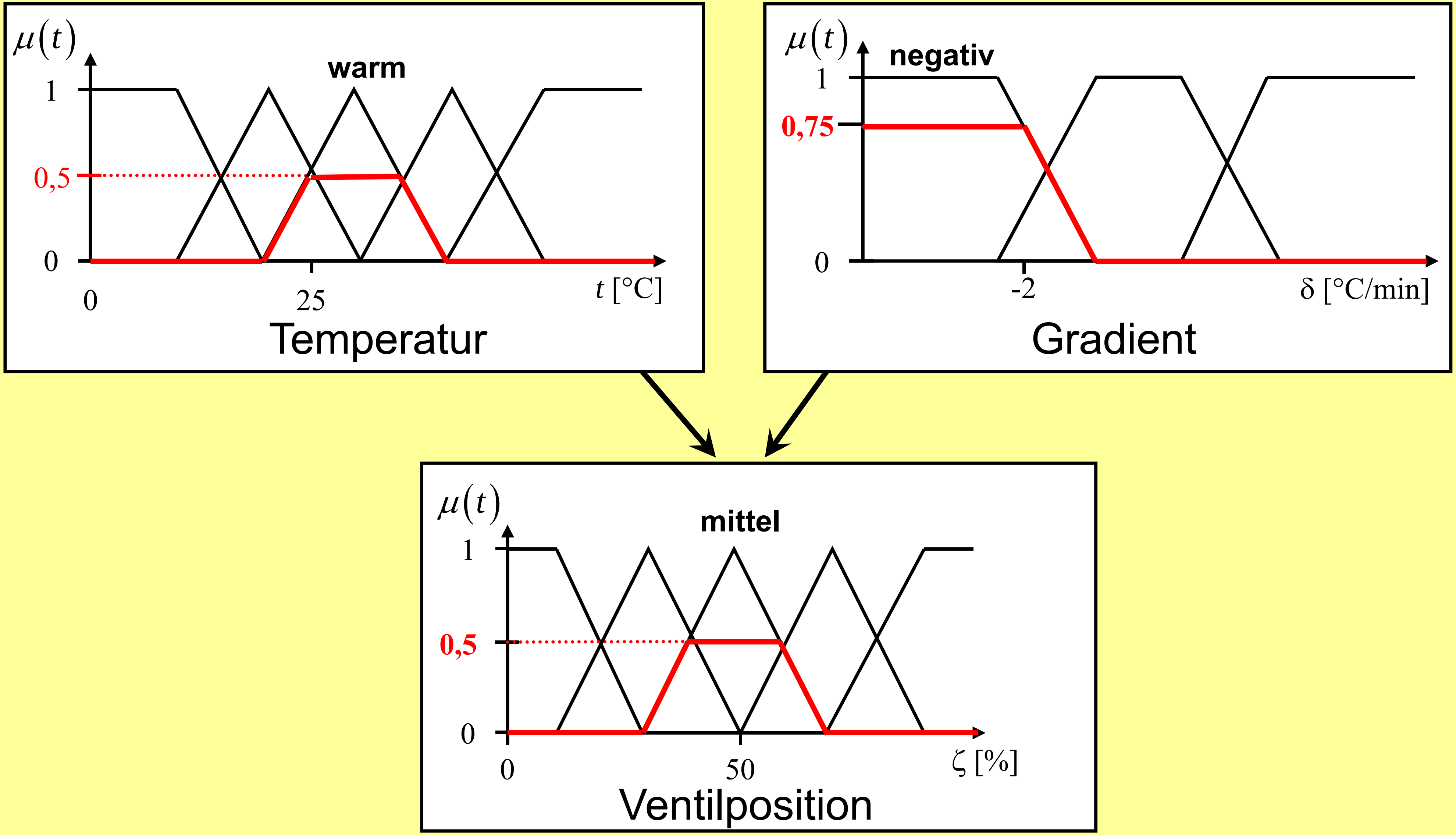
Beispiel: Heizungsregelung

Regel 2: IF Temperatur kalt AND Gradient null THEN Ventil offen



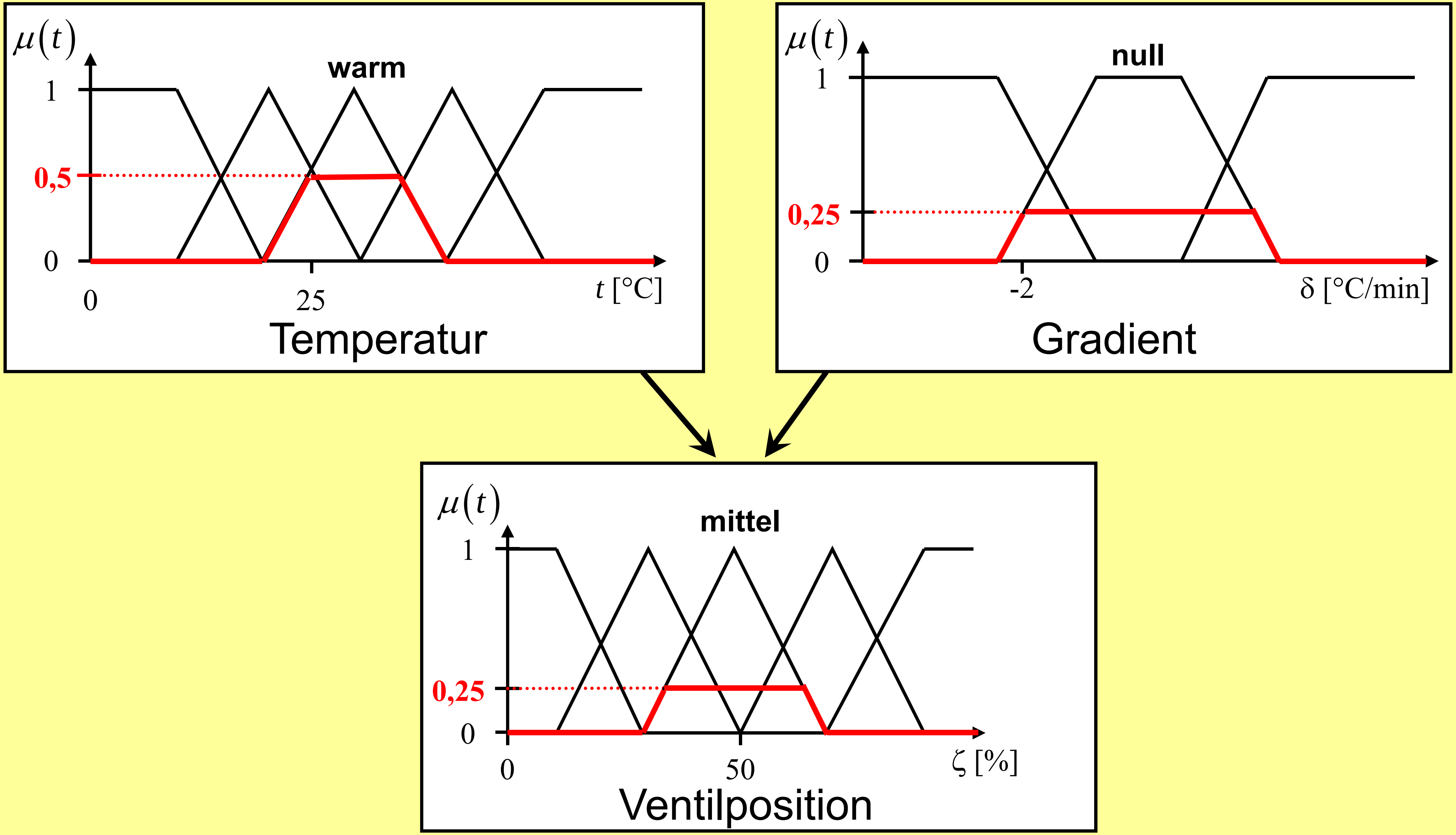
Beispiel: Heizungsregelung

Regel 3: IF Temperatur warm AND Gradient negativ THEN Ventil mittel



Beispiel: Heizungsregelung

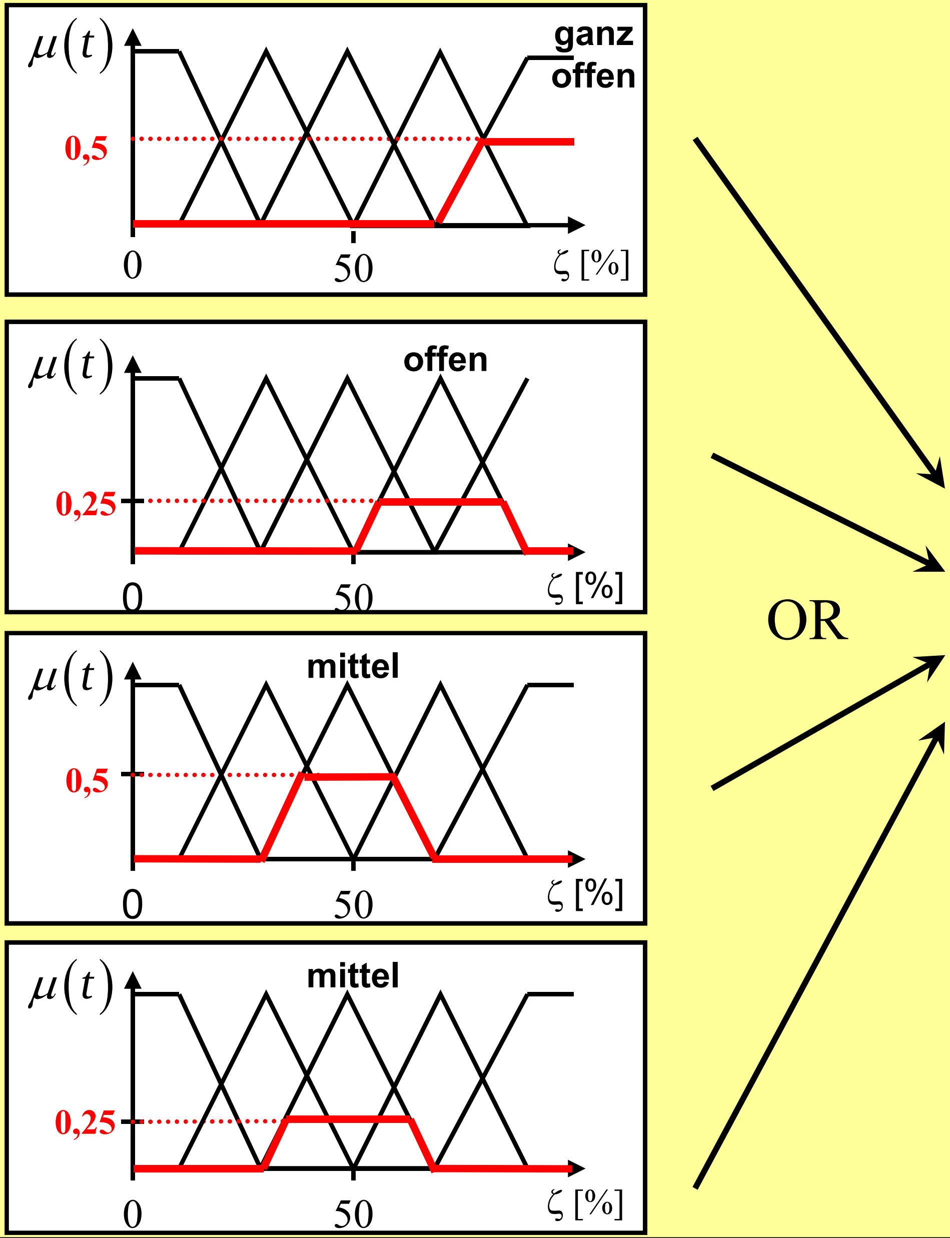
Regel 4: IF Temperatur warm AND Gradient null THEN Ventil mittel

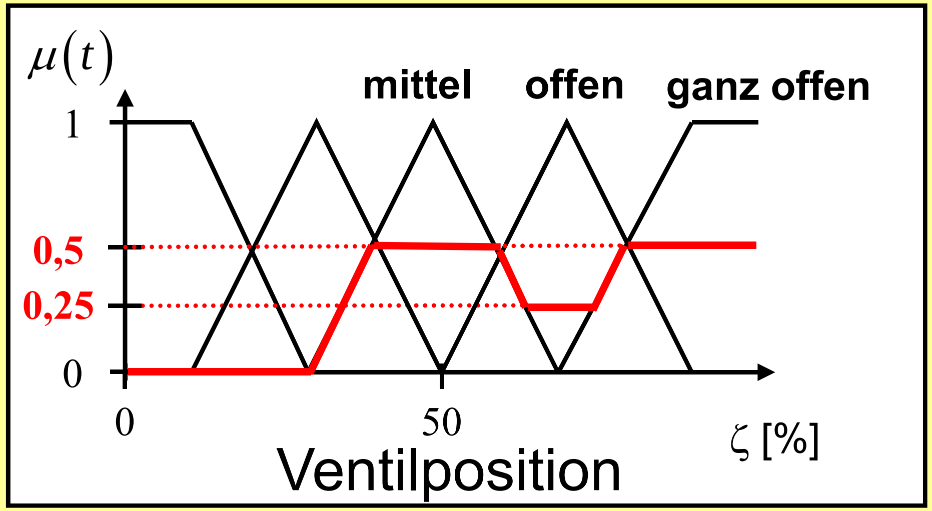


4.5 Fuzzy-Fusion

Beispiel: Heizungsregelung

Kombination der Regeln
hier: mittels Disjunktion





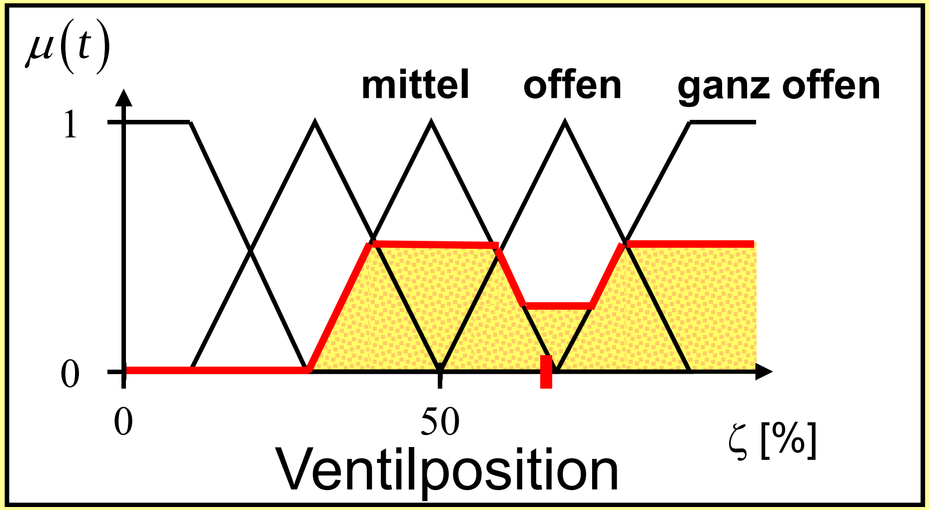
Defuzzifizierung: Berechnung des „scharfen“ Wertes der Ausgangsgröße

- Schwerpunktsverfahren (wichtigste Methode)
  Wähle den Wert w mit

$$w = \frac{\int t\,\mu(t)\,\mathrm{d}t}{\int \mu(t)\,\mathrm{d}t}$$

+ Berücksichtigung des gesamten Verlaufs der Zugehörigkeitsfunktion
+ „glattes“ Fusionsverhalten
– Evtl. sehr kleiner Wert des Zugehörigkeitsgrads $\mu(w)$

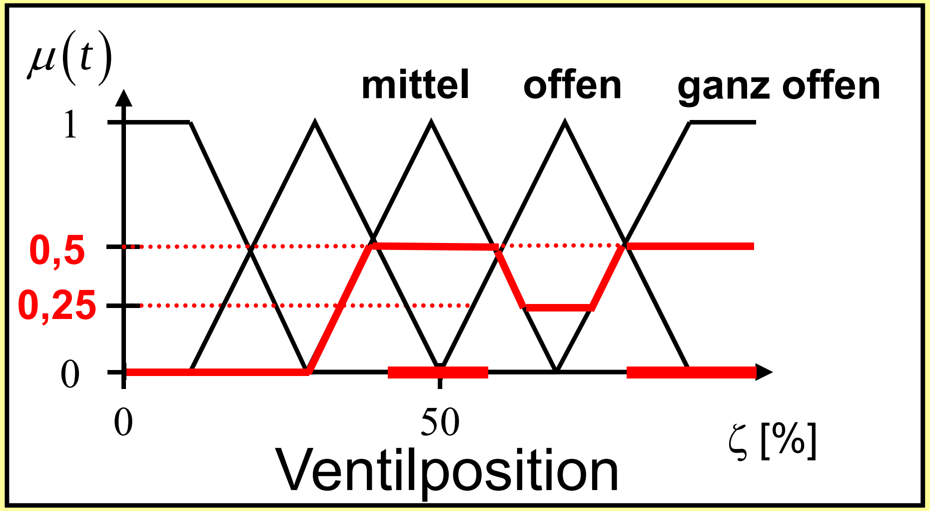
<u>Beispiel:</u>



4.6 Defuzzifizierung

- Methode der maximalen Höhe
  Wähle einen Wert, für den die Zugehörigkeitsfunktion maximal wird
  + einfache Berechnung
  - Maximum evtl. nicht eindeutig

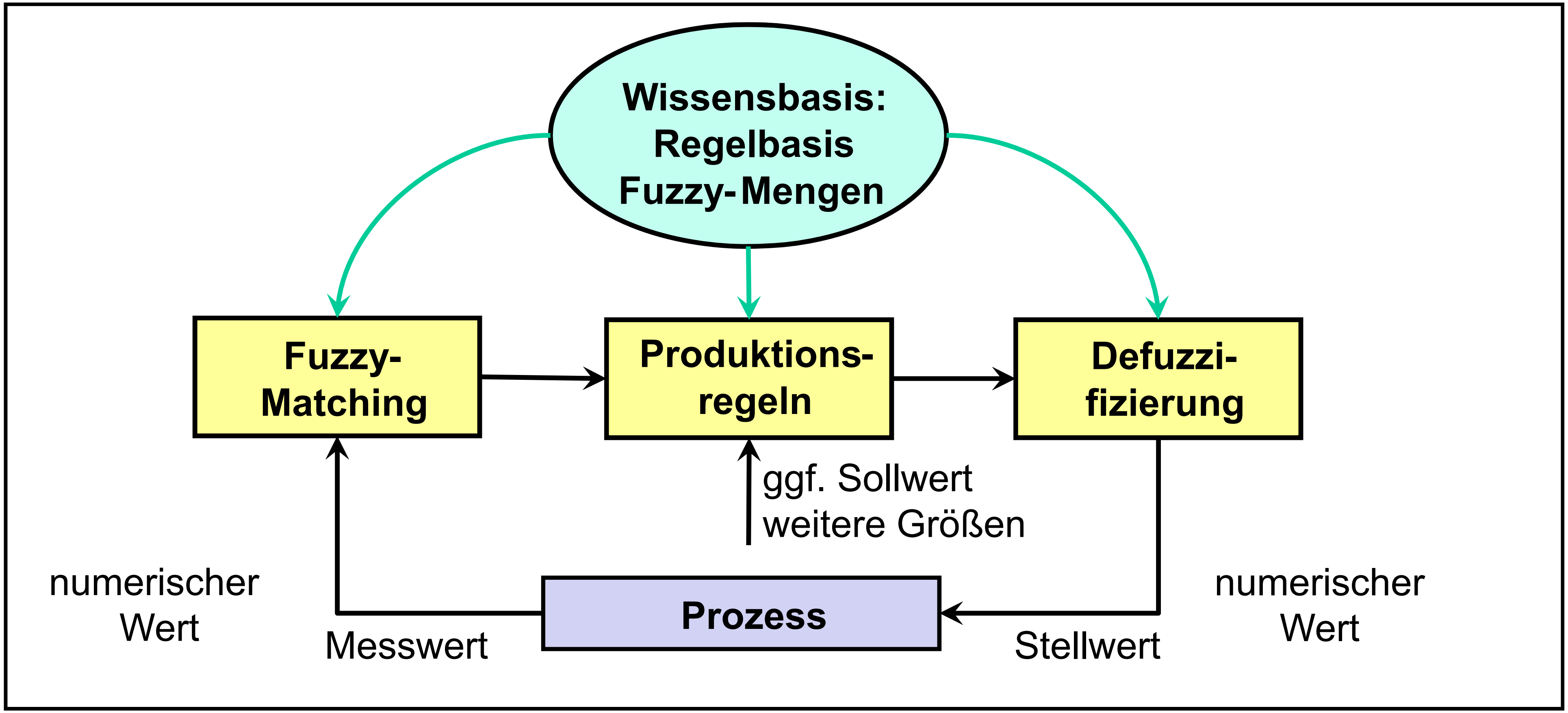
Beispiel:



- Maximum-Mittelwert-Methode
  Wähle das arithmetische Mittel aller Werte mit maximaler Zugehörigkeitsfunktion
  - problematisch bei stückweise konstanten Zugehörigkeitsfunktionen

4 Fuzzy-Systeme – Regelung

- Nutzung von Expertenwissen zur Prozessregelung
- Prozess mit numerischen „scharfen“ Ein-/Ausgängen
- Fuzzy-Logik zur Bestimmung des Stellwerts aus dem Messwert (und ggf. Sollgröße und weiteren Größen)



4 Fuzzy-Systeme – Zusammenfassung

- Unsicheres Wissen wird durch **unscharfe Mengen** mit entsprechenden **Zugehörigkeitsfunktionen** ausgedrückt
- Sehr **subjektive Methode**: Wahl der Terme, Zugehörigkeitsfunktionen, Regelbasis
- Gut zur **Repräsentation menschlichen Wissens** geeignet
- Vorbereitende Schritte:
  - Bestimmung der **Terme** und **Zugehörigkeitsfunktionen** der linguistischen Variablen
  - Erstellung der **Regelbasis aus Produktionsregeln**
- Eigentliche Fusion findet in folgenden Schritten statt:
  - **Fuzzifizierung (Fuzzy-Matching)** (Umsetzung der numerischen Beobachtungen in Terme linguistischer Variablen und Bestimmung der Werte der Zugehörigkeitsfunktionen)
  - Fusion mittels **Fuzzy-Regeln** (Produktionsregeln)
  - **Defuzzifizierung** (Gewinnung eines „scharfen“ Fusionsergebnisses)

4 Fuzzy-Systeme – Zusammenfassung

- Einbringung von Vorwissen durch:
  - Terme linguistischer Variablen
  - Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Variablen
  - Regelbasis
  - Vorgehensweise bei der Defuzzifizierung

Literatur

- Heinsohn, Jochen; Socher-Ambrosius, Rolf: *Wissensverarbeitung: eine Einführung*. Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- Strietzel, Roland D.: *Fuzzy-Regelung*. Oldenbourg, 1996.