3. Dempster-Shafer-Theorie

Inhaltsübersicht

Einführendes Beispiel: Der Wetterfrosch

- Wetterfrosch äußert: Das Wetter wird gut.
- Vertrauen in den Wetterfrosch: 60%
- Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie:
  A: Wetter wird gut, $\Pr(A) = 0{,}6$
- Gleichzeitig Aussage für die Gegenhypothese:
  $\bar{A}$: Wetter wird schlecht, $\Pr(\bar{A}) = 0{,}4$

Ansatz der Dempster-Shafer-Theorie:
Aus dem Vertrauen in den Wetterfrosch kann nicht geschlossen werden, dass der Gegenhypothese „Wetter wird schlecht" ein Vertrauen von 40% zugeordnet werden darf. Zu 40% weiss man nichts.

$\rightarrow$ Einführung eines Formalismus zum Ausdrücken von Nichtwissen

3 Dempster-Shafer-Theorie

- Als Verallgemeinerung der Bayes‘schen Theorie interpretierbar
- Meist für diskrete Größen verwendet (kontinuierliche Größen s. Literatur)
- Einführung von Basismaßen („Verallgemeinerung von W‘maßen“) zur Zuordnung einer „Menge an Glauben“ an Elementarergebnisse *oder kombinierte* Ereignisse
  → Spezifizierung von Nichtwissen explizit möglich
- Basismaße: Formalisierung des Wissens über Indizien bzw. Beweisstücke (Evidenzen)
  → Bezeichnung Evidenztheorie gebräuchlich
- Definition von Glaubens- und Plausibilitätsfunktionen (aus Basismaßen) zur Angabe von „unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten“

Historie

- Arthur Dempster (1960er Jahre):
  - System von unteren und oberen Wahrscheinlichkeitsgrenzen
  - Degree of Belief: Quantifizierung eines Zustands von partiellem Wissen, der einer Informationsquelle zugeordnet ist
  - Dempster‘s rule of combination: Regel, die das Wissen verschiedener unabhängiger Informationsquellen kombiniert
- Glenn Shafer (1970er Jahre):
  - Weiterentwicklung zur Dempster-Shafer-Theorie (Evidenztheorie)
  - (Erst jetzt) Abgrenzung von der Wahrscheinlichkeitstheorie: Versuch, eine Unsicherheitstheorie losgelöst von der W‘theorie zu entwerfen
- Phillipe Smets (1980er Jahre):
  - Modifikation der DS-Theorie aufgrund von unplausiblen Ergebnissen

Die Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ aller Elementarergebnisse wird als **Wahrnehmungsrahmen** (engl. frame of discernment) bezeichnet.

- Definition von Ω hat subjektiveren Charakter als in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. der Bayes-Theorie:
  Subjektivität dort bezieht sich auf die Interpretation der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, nicht auf die Elemente des Grundraumes

Ein **Basismaß** (engl. basis probability assignment) ist eine auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definierte Funktion m mit

(BM1) $m(A) \in [0,1]$ für alle Mengen $A \subseteq \Omega$

(BM2) $m(\varnothing) = 0$

(BM3) $\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$

3.1 Formale Struktur

- Grundgedanke:
  - (Menge an) Glauben wird (so genau wie möglich) auf Ereignisse aus dem Wahrnehmungsrahmen verteilt
  - Eine Menge an Glauben wird einem Ereignis A zugeteilt, wenn es nicht möglich ist, sie einem Ereignis zuzuteilen, das A impliziert
  - $m(A)$: Menge an Glauben, die man *exakt* A zuweist

Ein Ereignis A mit $m(A) \neq 0$ heißt **fokales Ereignis**

3.1 Formale Struktur

- Explizite Zuordnung von Vertrauen in eine Beobachtung (bzw. in ein Sensorsystem):
  Zuordnung des Rests an Glauben an den Wahrnehmungsrahmen
  (Vergleich Wahrscheinlichkeitstheorie: Zuordnung zum Komplement)

Beispiel: Wetterfrosch

- Vertrauen in den Wetterfrosch: 60%
- Formulierung in der Dempster-Shafer-Theorie: $m(A) = 0{,}6,\ m(\Omega) = 0{,}4$
- Übliche Formulierung mit Wahrscheinlichkeiten: $\Pr(A) = 0{,}6,\ \Pr(\bar{A}) = 0{,}4$

Eigenschaften von Basismaßen:

- Aus (BM3): Der „Gesamtglauben“ muss vollständig vergeben werden
- Aus (BM2): Closed-world-Assumption, d.h. Ω enthält alle möglichen Elementarergebnisse
- Basismaße sind die Bausteine für Belief- und Plausibilitätsmaße (s.u.)
- Ein Basismaß ist i.A. kein Wahrscheinlichkeitsmaß (s.u.)

3.1 Formale Struktur

<u>Wiederholung:</u> Axiome von Kolmogorov
für einen *endlichen* Wahrscheinlichkeitsraum Ω

$\Pr$: Wahrscheinlichkeitsmaß

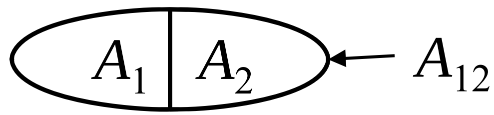
(A1): Nichtnegativität: $\Pr(A) \geq 0$

(A2): Normiertheit: $\Pr(\text{sicheres Ereignis}) = \Pr(\Omega) = 1$

(A3): Endliche Additivität: $A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

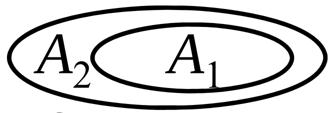
Daraus folgt Monotonie: $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \Pr(A) \leq \Pr(B)$

Bei Basismaßen: Additivität: $A_1 \cap A_2 = \varnothing,\; A_1 \cup A_2 = A_{12}$



Basismaß für A_{12} wird explizit zugeordnet

Monotonie: $A_1 \subseteq A_2$



Basismaße für A_1 und A_2 werden explizit zugeordnet

→ Basismaße sind i.A. keine Wahrscheinlichkeitsmaße!

3.1 Formale Struktur

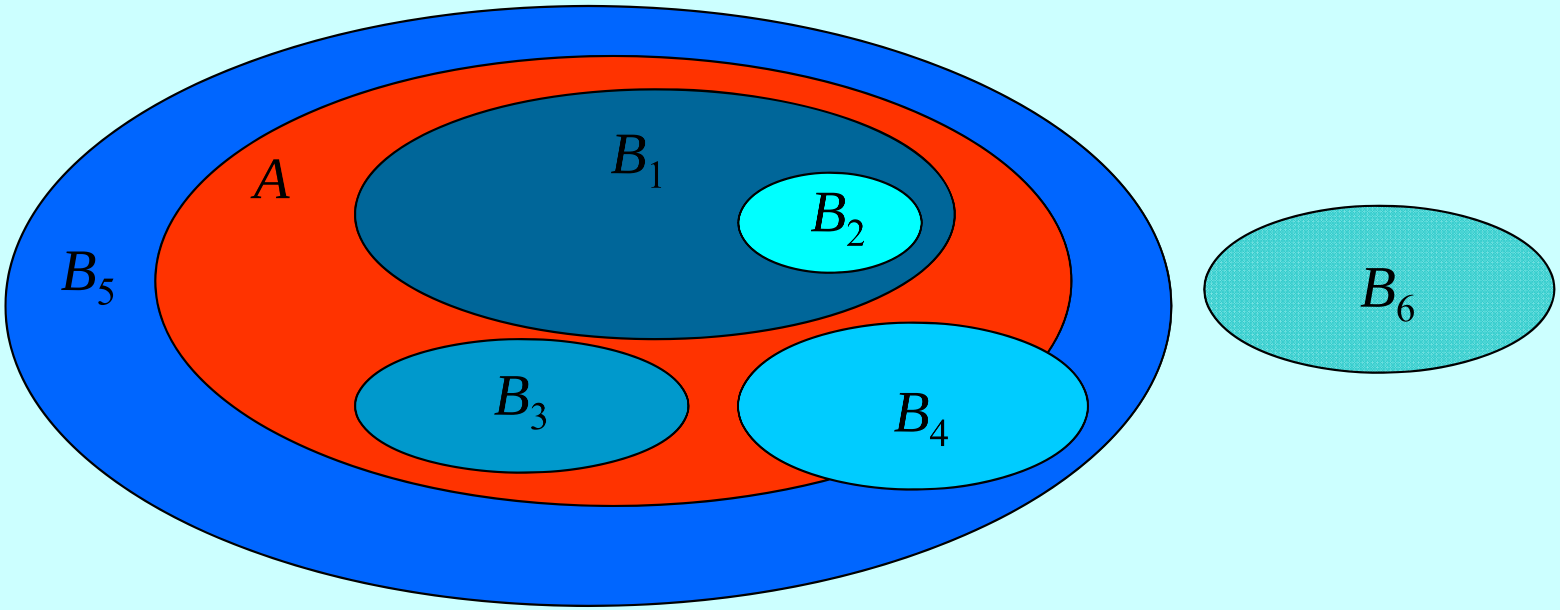
Basismaße sind die Bausteine für Glaubens- und Plausibilitätsfunktionen:

Ein Basismaß m induziert eine **Glaubensfunktion (Belief-Funktion)**
$Bel : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ durch

$$Bel(A) := \sum_{B:B\subseteq A} m(B)$$

(Summation über alle Ereignisse, die das Ereignis A implizieren)

Beispiel: $Bel(A) = ?$



Axiomatische Festlegung einer Glaubensfunktion:

Eine Glaubensfunktion ist eine Funktion $Bel : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ mit

(Bel1) $Bel(\Omega) = 1$

(Bel2) $Bel(\emptyset) = 0$

(Bel3) $$Bel(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \sum_i Bel(A_i) + (-1)^3 \sum_{i<j} Bel(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Inversion: $$m(A) = \sum_{B:B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Bel(B)$$

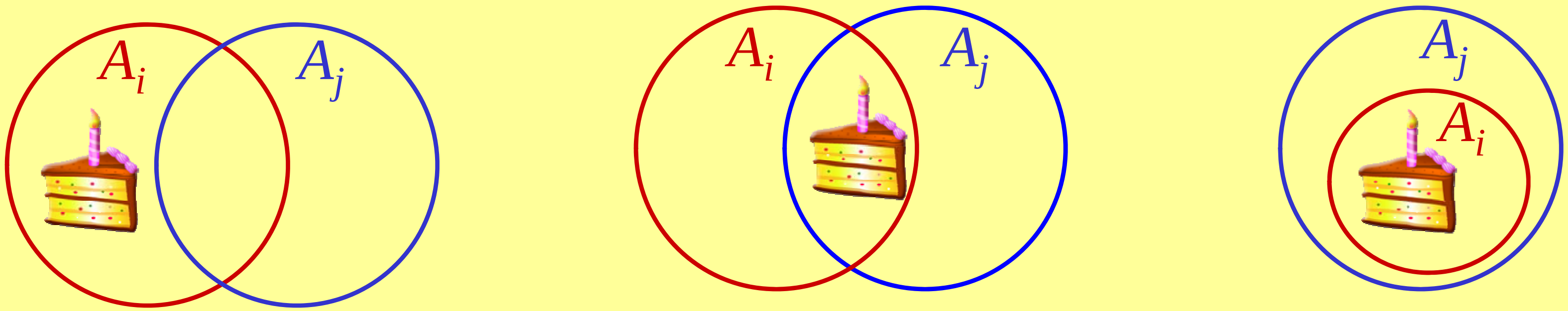
→ Eindeutige Umrechnung zwischen Basismaßen und Glaubensfunktionen

- m „verteilt“ den Glauben
- $Bel(A)$ gibt den (aufsummierten) Anteil an Glauben an, der mindestens, d.h. „mit Sicherheit“, dem Ereignis A zugewiesen werden kann (→ „untere Wahrscheinlichkeit“)

3.1 Formale Struktur

Beispiel zur Verdeutlichung: (nach Zadeh)

- Kuchenstücke werden auf Gebiete („Teller“) A_i verteilt
- $m(A_i)$: Anteil des gesamten Kuchens, der *genau* auf das Gebiet A_i gelegt wird
- Die Gebiete können sich nun (im Gegensatz zur Realität) überlappen: Ein Kuchenstück, das auf A_i gelegt wurde, *kann* sich nur auf A_i befinden (links), es *kann* sich auch auf A_j befinden (Mitte). Es *muss* sich aber nur dann auf A_j befinden, wenn A_i komplett auf A_j liegt (rechts).
- In jedem Fall ist $m(A_j) \neq$ Anteil des auf A_j *befindlichen* Kuchens: $Bel(A_j)$



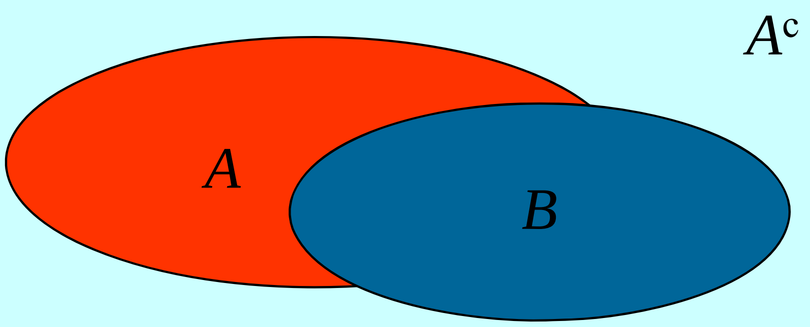
3.1 Formale Struktur

- Es gilt: $Bel(A) + Bel(A^c) \leq 1$

  Die Summe über den sicheren Glauben in ein Ereignis und in seine Negation kann kleiner Eins sein

- Eine Glaubensfunktion ist auch deshalb i.A. kein Wahrscheinlichkeitsmaß

Beispiel:



Falls $m(B) > 0$: $Bel(A) + Bel(A^c) < 1$

Leere Glaubensfunktion (Vacuous Belief Funktion):

$$Bel(\Omega) = 1$$

$Bel(A) = 0$ für alle echten Teilmengen A von Ω

$\rightarrow$ Ausdruck vollkommener Unwissenheit

Dies entspricht *nicht* einer Verteilung des Glaubens auf die Elementarergebnisse mittels des zugehörigen Basismaßes.

Vergleich zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Hier würde man nach dem Prinzip der maximalen Entropie die Wahrscheinlichkeiten auf die Elementarergebnisse verteilen.

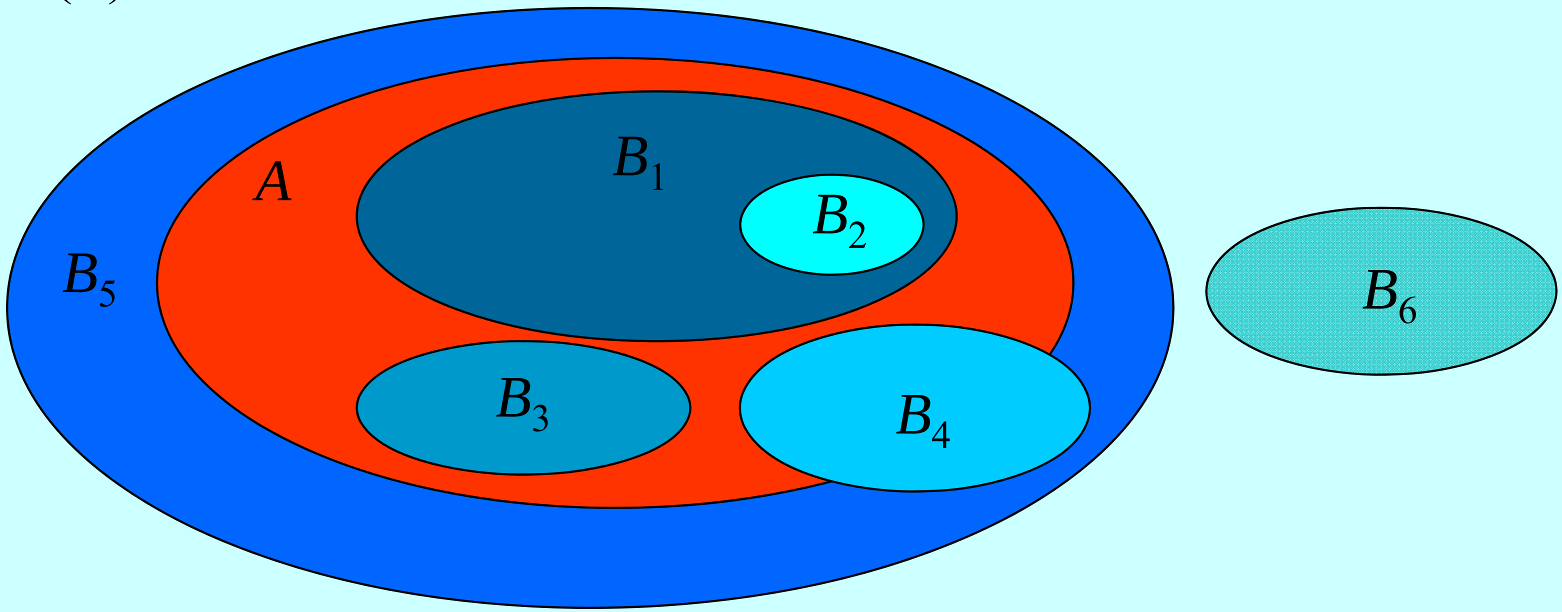
3.1 Formale Struktur

Ein Basismaß m induziert eine Plausibilitätsfunktion $Pl : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ durch

$$Pl(A) := \sum_{B : A \cap B \neq \emptyset} m(B)$$

(Summation über alle Ereignisse, die dem Ereignis A nicht widersprechen)

Beispiel: $Pl(A) = ?$



3.1 Formale Struktur

Dualität: $Pl(A) = 1 - Bel(A^c)$

$Pl(.)$ ist komplementär zu $Bel(.)$

Durch die Definitionen von Bel und Pl, Inversion und Dualität sind m, Bel, Pl ineinander verlustlos umrechenbar

- $Pl(A)$ gibt den Anteil an Glauben an, der maximal, d.h. möglicherweise, dem Ereignis A zugewiesen werden kann (z.B. falls „die Umstände entsprechend" sind)

$Pl(A)$ gibt die zu $Bel(A)$ analoge obere Grenze an

($\rightarrow$ „obere Wahrscheinlichkeit")

3.1 Formale Struktur

Einige Eigenschaften von Glaubens- und Plausibilitätsfunktion:

- $Bel(\varnothing) = Pl(\varnothing) = 0$
- $Bel(\Omega) = Pl(\Omega) = 1$
- $0 \leq Bel(A) \leq Pl(A) \leq 1$
- $Bel(A) + Bel(A^c) \leq 1 \qquad Pl(A) + Pl(A^c) \geq 1$
- $Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B)$
  $Pl(A \cap B) \leq Pl(A) + Pl(B) - Pl(A \cup B)$
- Wenn $A \cap B = \varnothing$: $Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B)$ (Superadditivität)
  $Pl(A \cup B) \leq Pl(A) + Pl(B)$ (Subadditivität)

Beispiel: Berechnung von Glaubens- und Plausibilitätsfunktion

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

- $A_1 = \{\omega_1\}$:

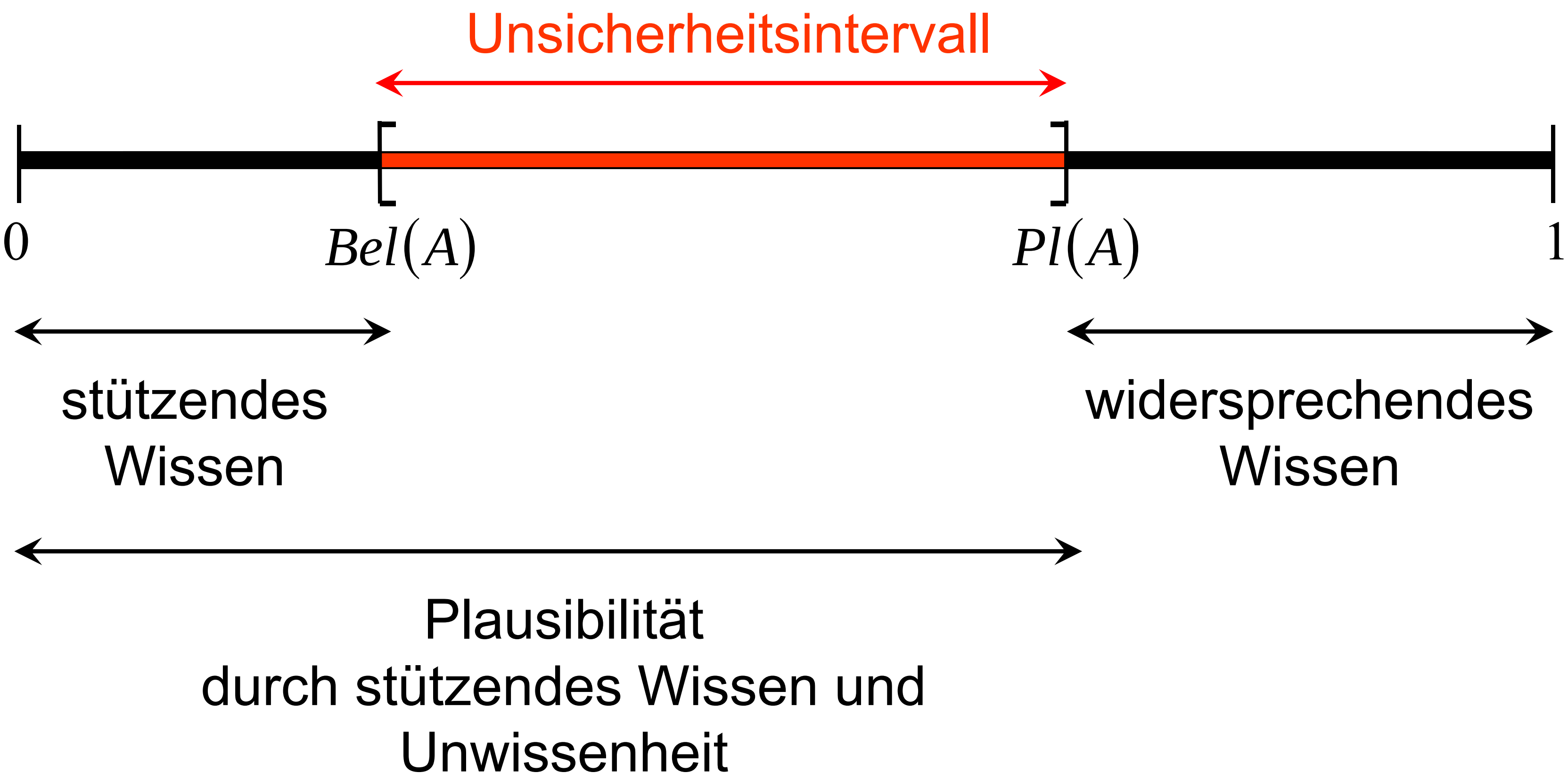
$$Bel(A_1) = m(\omega_1)$$

Abkürzung: $m(\omega_1) = m(\{\omega_1\})$

$$\begin{aligned} Pl(A_1) &= m(\omega_1) + m(\omega_1 \cup \omega_2) + m(\omega_1 \cup \omega_3) + m(\omega_1 \cup \omega_4) \\ &\quad + m(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3) + m(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_4) + m(\omega_1 \cup \omega_3 \cup \omega_4) \\ &\quad + m(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4) \\ &= 1 - Bel(A_1^c) \\ &= 1 - [m(\omega_2) + m(\omega_3) + m(\omega_4) \\ &\quad + m(\omega_2 \cup \omega_3) + m(\omega_2 \cup \omega_4) + m(\omega_3 \cup \omega_4) \\ &\quad + m(\omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4)] \end{aligned}$$

3.1 Formale Struktur

- Glaubens- und Plausibilitätsfunktion legen das Unsicherheitsintervall fest:
  - Der „tatsächliche Anteil an Glauben“ liegt im Intervall $\left[Bel(A), Pl(A)\right]$
  - $Pl(A) - Bel(A)$ gibt eine Art „Maß der Unwissenheit“ bzgl. A an



Quelle: Lawrence A. Klein: *Sensor and Data Fusion.* SPIE Press, 2004

3.1 Formale Struktur

Unsicherheitsintervall $[Bel(A), Pl(A)]$	Interpretation
$[0,1]$ bzw. $\left[Bel\left(A^c\right), Pl\left(A^c\right)\right] = [0,1]$	Vollkommenes Nichtwissen
$[c,c]$, $0 < c < 1$	Feste „Wahrscheinlichkeit“ von A
$[0,0]$	A ist falsch
$[1,1]$	A ist wahr
$[c,1]$, $0 < c < 1$	Wissen stützt nur A
$[0,c]$, $0 < c < 1$	Wissen stützt nur A^c

Beispiel: **Konstruktion von Unsicherheitsintervallen**

Ein Sensor mit mögliche Beobachtungen: $\Omega = \{a_1, a_2, a_3\}$

Vorliegende Beobachtung: $m\left(\boxed{a_1, a_1^{c}, a_1 \cup a_2}, \boxed{\Omega}\right) = (0{,}4,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}1)$

vom Sensor bestimmt

„Misstrauen“ (Rest)

Alle anderen Basismaße = 0

Aussage	$Bel(.)$	$Pl(.)$	Uns.Interv.
a_1	0,4 (gegeben)	$1 - Bel(a_1^{c})$ $= 1 - 0{,}2 = 0{,}8$	$[0{,}4,\ 0{,}8]$
$a_1^{c} = \{a_2, a_3\}$	0,2 (gegeben)	$1 - Bel(a_1)$ $= 1 - 0{,}4 = 0{,}6$	$[0{,}2,\ 0{,}6]$
$a_1 \cup a_2$	$m(a_1) + m(a_2) + \mathrm{m}(a_1 \cup a_2)$ $= 0{,}4 + 0 + 0{,}3 = 0{,}7$	$1 - Bel((a_1 \cup a_2)^{c})$ $= 1 - Bel(a_1^{c} \cap a_2^{c})$ $= 1 - 0 = 1$	$[0{,}7,\ 1]$
Ω	$Bel(\Omega) = m(a_1) + m(a_1^{c}) +$ $m(a_1 \cup a_2) + m(\Omega) = 1$	$1 - Bel(\Omega^{c})$ $= 1 - 0 = 1$	$[1,\ 1]$

Quelle: Lawrence A. Klein: *Sensor and Data Fusion.* SPIE Press, 2004

Zusammenhang zu Wahrscheinlichkeiten:
(Degree-of-Belief-Interpretation)

Spezialfall:

Alle fokalen Mengen bestehen aus genau einem Element, d.h.

$$\boxed{m(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad A = \{\omega\}}$$

Dann wird durch

$$\Pr(B) := \sum_{\omega \in B} m(\omega)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.

Es gilt dann $\boxed{Bel(B) = Pl(B) = \Pr(B)}$

3.2 Kombinationsregel

Fusion zweier Basismaße m_1, m_2 über Ω (z.B. von unterschiedlichen Sensorsystemen) auf ein kombiniertes Basismaß $m_{12} = m_1 \oplus m_2$ (auch als „orthogonale Summe" bezeichnet)

Dempsters Kombinationsregel (Dempster's rule of combination, DRC):

$$m_1 \oplus m_2(A) := \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset \\ \dfrac{\sum\limits_{X,Y:X\cap Y=A} m_1(X)\, m_2(Y)}{\boxed{1-K}} & \text{für } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Normierung

wobei $K := \sum\limits_{X,Y:X\cap Y=\emptyset} m_1(X)\, m_2(Y)$

K: Konfliktgrad

$0 < K < 1$: partieller Konflikt

$K = 1$: absoluter Konflikt (Inkonsistenz) $\rightarrow$ DRC nicht anwendbar

3.2 Kombinationsregel

- Eine Basisfunktion m wird als Repräsentation einer Evidenz e betrachtet
  $\rightarrow$ Mittels DRC werden zwei Evidenzen e_1, e_2 auf eine kombinierte Evidenz e_{12} abgebildet
- Bei der Berechnung der Summen in der DRC reicht es, die Schnitte fokaler Elemente zu betrachten
- Voraussetzung für die Anwendbarkeit der DRC:
  - m_1, m_2 müssen auf dem selben Wahrnehmungsrahmen Ω definiert sein
  - e_1, e_2 dürfen sich nicht völlig widersprechen (d.h. $K < 1$)

  $\rightarrow$ In diesem Fall heißen m_1, m_2 (bzw. e_1, e_2) unabhängig
- Kritikpunkte an DRC:
  - Hohe Komplexität
  - Nicht intuitive Ergebnisse
  - Keine gegenüber der Wahrscheinlichkeitstheorie erweiterten Möglichkeiten

Fusion mittels Dempster-Shafer-Theorie

- Gegeben: Ergebnisse mehrerer unabhängiger Sensoren $S_1,\dots, S_N$ mit begrenztem Vertrauen in die Beobachtung
- Für jeden Sensor S_i lässt sich das Vertrauen in den von ihm beobachteten Wert durch ein Basismaß m_i formulieren $(i=1,\dots,N)$
- Iterative Verknüpfung der Basismaße mittels Dempsters Kombinationsregel:

$$m_1 \oplus m_2 \to (m_1 \oplus m_2) \oplus m_3 \to \dots \to (m_1 \oplus \dots \oplus m_{N-1}) \oplus m_N$$

(die Operation $\oplus$ ist assoziativ und kommutativ)

- Ergebnis: Fusioniertes Basismaß, daraus fusionierte Glaubens- und Plausibilitätsfunktion sowie resultierendes Unsicherheitsintervall
- Der Verknüpfungsoperator $\oplus$ ist nicht idempotent, d.h. i.A. gilt

$$m \oplus m \neq m$$

$\to$ Unabhängigkeit der Quellen ist von großer Wichtigkeit

Beispiel: **Sensordatenfusion** (2 unabhängige Sensoren)

Sensor	**Zuverlässigkeit**
S_1	50%
S_2	40%

Mögliche Beobachtungen:

$$\Omega = \{1,\ldots,1000\}$$

Beide Sensoren liefern die gleiche Beobachtung 111 (oder irgendeinen anderen Wert innerhalb des Wahrnehmungsrahmens)

$m_1(\Omega) = 0{,}5$	$m(\{111\}) = 0{,}2$	$m(\Omega) = 0{,}3$
$m_1(\{111\}) = 0{,}5$	$m(\{111\}) = 0{,}2$	$m(\{111\}) = 0{,}3$
	$m_2(\{111\}) = 0{,}4$	$m_2(\Omega) = 0{,}6$

$$\Rightarrow m_1 \oplus m_2(\{111\}) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}7$$

$$m_1 \oplus m_2(\Omega) = 0{,}3$$

Dem Beobachtungsergebnis 111 kann also mit einem Vertrauen von 70% geglaubt werden.

3 Dempster-Shafer-Theorie – Zusammenfassung

- **Unvollständige Modellierung** des Wissens zulässig (Bayes: A-priori-WV, bedingte WV sind explizit zu modellieren)
- Zuordnung des Glaubensmaßes an **vollständiges Unwissen**: $m(\Omega)$
- Trennung zwischen stützendem Wissen („**Vertrauen**“) ($\rightarrow Bel(.)$) und widersprechendem Wissen („**Misstrauen**“) ($\rightarrow Pl(.)$)
- Gewisser Vorteil bei unvollständigem Wissen im Vergleich zur Bayes‘schen Methodik
- **Darstellung** des verfügbaren Wissens mittels Basismaßen oft **schwierig**, dann ähnlicher Aufwand wie mit Wahrscheinlichkeiten
- **Berücksichtigung von Vorwissen** im Vergleich zur Bayes‘schen Methodik: Keine A-priori-WV, aber weitere Quelle integrierbar
- Falls $Bel(.) = Pl(.) = \Pr(.)$: Wahrscheinlichkeitsmaße
- Meist **aufwendigere Berechnung** als bei Bayes‘scher Fusion

Literatur

- Heinsohn, Jochen; Socher-Ambrosius, Rolf: *Wissensverarbeitung: eine Einführung*. Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- Klein, Lawrence A.: *Sensor and Data Fusion – A Tool for Information Assessment and Decision Making*. SPIE, 2004.
- Shafer, Glenn: *Dempster-Shafer Theory.* http://www.glennshafer.com/assets/downloads/article48.pdf
- Wu, H.: *Sensor Data Fusion for Context-Aware Computing Using Dempster-Shafer Theory*. Ph.D. Dissertation, The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 2003.
- Wu, H.; Siegel, M.; Stiefelhagen, R.; Yang, J.: *Sensor Fusion Using Dempster-Shafer Theory*. Proceedings of IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Anchorage, AK, USA, May 21-23, 2002, May, 2002.